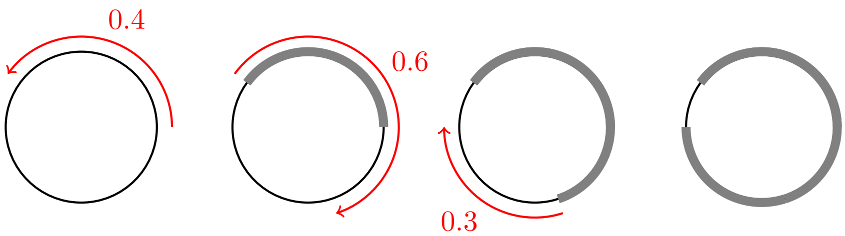
Language: **Italian**

Day: **2**

Domenica, 16 Aprile, 2023

Problema 4. La lumachina Turbo è inizialmente ferma in un punto di una circonferenza di lunghezza 1. Data una sequenza infinita di numeri reali positivi $c_1, c_2, c_3, \ldots$, Turbo striscia successivamente per archi di lunghezza $c_1, c_2, c_3, \ldots$ attorno alla circonferenza, ogni volta decidendo se strisciare in verso orario o antiorario.

Ad esempio, se la sequenza $c_1, c_2, c_3, \ldots$ fosse $0.4, 0.6, 0.3, \ldots$, Turbo potrebbe iniziare a strisciare nel modo seguente:



Si determini la più grande costante $C > 0$ con la seguente proprietà: per ogni sequenza di numeri reali positivi $c_1, c_2, c_3, \ldots$ con $c_i < C$ per ogni i, Turbo può (dopo aver studiato la sequenza) assicurarsi che esiste un punto sulla circonferenza, che non visiterà mai, e attraverso il quale non striscerà mai.

Problema 5. Sia dato un intero positivo $s \geqslant 2$. Per ogni intero positivo k, definiamo il suo *twist* k' come segue: scrivendo k come $as + b$, dove a, b sono interi non negativi e $b < s$, allora $k' = bs + a$. Dato l'intero positivo n, si consideri la sequenza infinita $d_1, d_2, \ldots$ dove $d_1 = n$ e d_{i+1} è il twist di d_i per ogni intero positivo i.

Dimostare che questa sequenza contiene l'1 se e solo se il resto della divisione di n per $s^2 - 1$ è 1 o s.

Problema 6. Sia ABC un triangolo con circoscritta Ω. Chiamiamo S_b e S_c rispettivamente i punti medi degli archi AC e AB che non contengono il terzo vertice. Sia N_a il punto medio dell'arco BAC (l'arco BC contenente A). Sia I l'incentro di ABC. Sia ω_b la circonferenza tangente ad AB e internamente tangente a Ω in S_b, mentre sia ω_c la circonferenza tangente ad AC ed internamente tangente a Ω in S_c. Dimostrare che la retta IN_a, e la retta passante per le intersezioni di ω_b e ω_c, si intersecano su Ω.

L'incentro di un trangolo è il centro della sua circonferenza inscritta, la circonferenza interna al triangolo e tangente a tutti i suoi tre lati.

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale fino a 7 punti

I problemi devono rimanere riservati fino a Domenica 16 Aprile, 22:00 UTC (23:59 nel Fuso orario estivo dell'Europa Centrale).