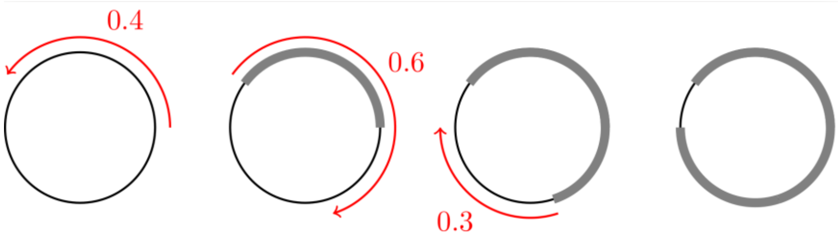
Language: **Hebrew**

Day: 2

יום ראשון, 16 באפריל, 2023

שאלה 4. טורבו החילזון יושב בנקודה על מעגל בעל היקף 1. בהינתן סדרה אינסופית $c_1, c_2, c_3, \ldots$ של מספרים ממשיים חיוביים, טורבו זוחל למרחקים $c_1, c_2, c_3, \ldots$ על המעגל לפי הסדר, ובכל פעם בוחר אם לזחול את המרחק הבא עם או נגד כיוון השעון.

לדוגמה, אם $c_1, c_2, c_3, \ldots = 0.4, 0.6, 0.3, \ldots$, טורבו יכול להתחיל לזחול כך:



מצאי את הקבוע הגדול ביותר $C > 0$ עם התכונה הבאה: לכל סדרה $c_1, c_2, c_3, \ldots$ של ממשיים חיוביים עם $c_i < C$ לכל i, טורבו יכול (לאחר עיון בסדרה) להבטיח שתהיה נקודה כלשהי על המעגל שהוא לעולם לא יבקר בה או יזחל מעליה.

שאלה 5. נתון $s \geq 2$ שלם. לכל k שלם חיובי, נגדיר את ה**פיתול** שלו להיות המספר k' הבא: אם נכתוב את k בייצוג $as + b$, כאשר a, b שלמים אי-שליליים עם $b < s$, אז $k' = bs + a$. עבור n שלם חיובי, נתבונן בסדרה האינסופית $d_1, d_2, \ldots$ בה $d_1 = n$ ו-d_{i+1} הוא הפיתול של d_i לכל i שלם חיובי.

הוכיחי כי סדרה זו מכילה את 1 אם ורק אם השארית של n בחלוקה ב-$s^2 - 1$ היא 1 או s.

שאלה 6. יהא ABC משולש עם מעגל חוסם Ω. נסמן ב-S_b וב-S_c בהתאמה את אמצעי הקשתות AC ו-AB שלא מכילות את הקודקוד השלישי. נסמן ב-N_a את אמצע הקשת BAC (הקשת BC שמכילה את A). נסמן ב-I את מרכז המעגל החסום ב-ABC. נסמן ב-ω_b את המעגל שמשיק לישר AB ומשיק מבפנים ל-Ω ב-S_b, ונסמן ב-ω_c את המעגל שמשיק לישר AC ומשיק מבפנים ל-Ω ב-S_c. הוכיחי כי הישר IN_a, והישר דרך נקודות החיתוך של ω_b ו-ω_c, נפגשים על המעגל Ω.

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות

על השאלות להישאר חסויות עד יום ראשון ה-16 באפריל, 22:00 שעון UTC (00:00 (יום שני) בסלובניה).