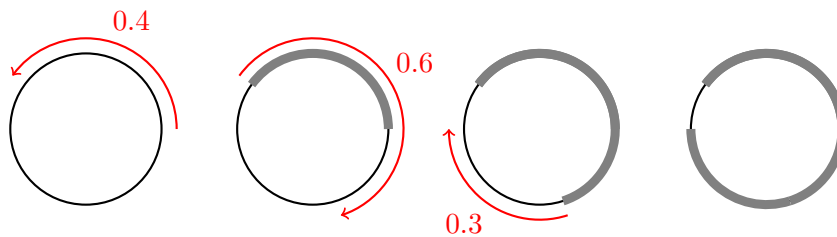


Κυριακή, 16 Απριλίου, 2023

Πρόβλημα 4. Ο Turbo το σαλιγκάρι βρίσκεται σε ένα σημείο ενός κύκλου με μήκος περιφέρειας 1. Δοθείσας μιας άπειρης ακολουθίας θετικών πραγματικών αριθμών c_1, c_2, c_3, \dots , ο Turbo σέρνεται διαδοχικά αποστάσεις c_1, c_2, c_3, \dots γύρω από τον κύκλο, κάθε φορά επιλέγοντας να σέρνεται είτε δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα.

Για παράδειγμα, αν η ακολουθία c_1, c_2, c_3, \dots είναι η $0.4, 0.6, 0.3, \dots$, τότε ο Turbo μπορεί να ξεκινήσει να σέρνεται ως ακολούθως:



Να προσδιορίσετε τη μέγιστη σταθερά $C > 0$ με την παρακάτω ιδιότητα: για κάθε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών c_1, c_2, c_3, \dots με $c_i < C$ για όλα τα i , ο Turbo (αφού μελετήσει την ακολουθία) μπορεί να εξασφαλίσει ότι υπάρχει κάποιο σημείο στον κύκλο το οποίο δε θα επισκεφτεί ποτέ ή δε θα συρθεί πάνω από αυτό.

Πρόβλημα 5. Δίνεται ένας θετικός ακέραιος $s \geq 2$. Για κάθε θετικό ακέραιο k , ορίζουμε τον αντεστραμμένο του k' ως ακολούθως: γράφουμε τον k ως $as + b$, όπου a, b είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $b < s$, οπότε $k' = bs + a$. Για το θετικό ακέραιο n , θεωρούμε την άπειρη ακολουθία d_1, d_2, \dots όπου $d_1 = n$ και d_{i+1} είναι ο αντεστραμμένος του d_i για κάθε θετικό ακέραιο i .

Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία περιέχει το 1 αν και μόνο αν ο n όταν διαιρεθεί με τον $s^2 - 1$ αφήνει υπόλοιπο 1 ή s .

Πρόβλημα 6. Έστω τρίγωνο ABC με περιγεγραμμένο κύκλο Ω . Έστω S_b και S_c , αντίστοιχα, τα μέσα των τόξων AC και AB τα οποία δεν περιέχουν την τρίτη κορυφή του τριγώνου. Έστω N_a το μέσο του τόξου BAC (το τόξο BC που περιέχει το A). Έστω I το έγκεντρο του τριγώνου ABC . Έστω ω_b ο κύκλος που εφάπτεται στο AB και εφάπτεται εσωτερικά στον Ω στο S_b , και έστω ω_c ο κύκλος που εφάπτεται στο AC και εφάπτεται εσωτερικά στον Ω στο S_c . Να αποδείξετε ότι η ευθεία IN_a , και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία τομής των ω_b και ω_c , τέμνονται πάνω στον Ω .

Το έγκεντρο ενός τριγώνου είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του, δηλαδή του κύκλου στο εσωτερικό του τριγώνου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του.

Γλώσσα: Ελληνικά

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Τα προβλήματα είναι εμπιστευτικά έως την Κυριακή 16 Απριλίου 22:00 UTC (00:00 (Δευτέρα) Θερινή Ώρα Κεντρικής Ευρώπης).