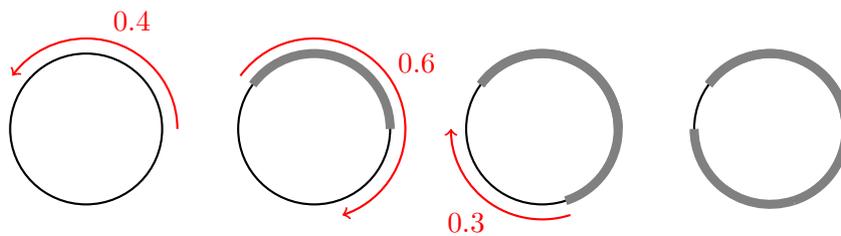


Sonntag, 16. April 2023

Aufgabe 4. Die Schnecke Turbo sitzt auf einem Punkt auf einem Kreis mit Umfang 1. Für eine unendliche Folge positiver reeller Zahlen c_1, c_2, c_3, \dots kriecht Turbo nacheinander die Distanzen c_1, c_2, c_3, \dots auf dem Kreis entlang, wobei er jedes Mal wählt, ob er im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn kriecht.

Wenn $c_1 = 0.4, c_2 = 0.6, c_3 = 0.3, \dots$, fängt Turbo zum Beispiel folgendermassen an:
[deutsch: Wenn $c_1 = 0,4; c_2 = 0,6; c_3 = 0,3; \dots$, fängt Turbo zum Beispiel folgendermaßen an:]



Bestimme die größte Konstante $C > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Folge von positiven reellen Zahlen c_1, c_2, c_3, \dots mit $c_i < C$ für alle i kann Turbo (nachdem er sich die Folge angesehen hat) sicherstellen, dass es einen Punkt gibt, den er niemals erreicht und über den er niemals kriecht.

Aufgabe 5. Sei $s \geq 2$ eine positive ganze Zahl. Für jede positive ganze Zahl k sei der *Twist* k' wie folgt definiert: Schreibe k als $as + b$, wobei a, b nichtnegative ganze Zahlen sind und $b < s$ ist. Dann ist der Twist $k' = bs + a$. Für eine positive ganze Zahl n , betrachte die Folge d_1, d_2, \dots , wobei $d_1 = n$ ist und für alle positiven ganzen Zahlen i das Folgenglied d_{i+1} der Twist von d_i ist.

Zeige, dass 1 genau dann in der Folge enthalten ist, wenn der Rest von n bei Division durch $s^2 - 1$ entweder 1 oder s ist.

Aufgabe 6. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis Ω . S_b and S_c seien die Mittelpunkte derjenigen Kreisbögen AC bzw. AB , die jeweils nicht den dritten Punkt enthalten. Sei N_a der Mittelpunkt des Kreisbogens BAC (der Kreisbogen BC , der A enthält). Sei I der Inkreismittelpunkt von Dreieck ABC . Sei ω_b der Kreis, der AB berührt und Ω von innen in Punkt S_b berührt, und sei ω_c der Kreis, der AC berührt und Ω von innen in Punkt S_c berührt. Zeige, dass sich Gerade IN_a und die Gerade durch die Schnittpunkte von ω_b und ω_c auf Ω schneiden.

Language: German

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert

Die Aufgaben sind vertraulich zu behandeln bis Montag, den 17. April, 0:00 Uhr mittlereuropäischer Sommerzeit.