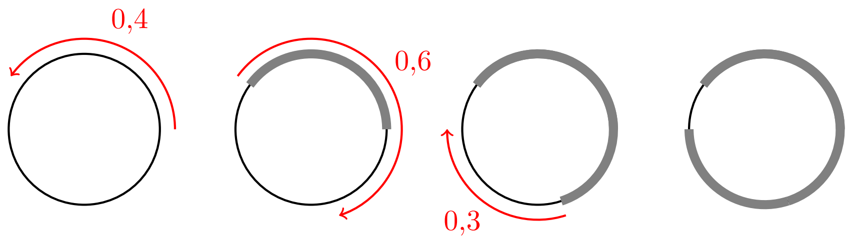
Language: **French**

Day: **2**

Dimanche, 16 avril, 2023

Problème 4. Turbo l'escargot se situe sur un point d'un cercle de périmètre 1.
Soit $c_1; c_2; c_3; \ldots$ une suite infinie de réels strictement positifs. Turbo rampe successivement les distances $c_1; c_2; c_3; \ldots$ autour du cercle, en choisissant à chaque fois s'il le fait dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens opposé.

Par exemple, si la suite $c_1; c_2; c_3; \ldots$ est 0,4 ; 0,6 ; 0,3 ; … alors Turbo peut commencer à ramper de la manière suivante :



Déterminer la plus grande constante $C > 0$ satisfaisant la propriété suivante : pour chaque suite de réels strictement positifs $c_1; c_2; c_3; \ldots$ avec $c_i < C$ pour tout i, Turbo peut, après avoir analysé la suite, s'assurer qu'il existe un point du cercle sur lequel il ne rampe jamais.

Problème 5. Soit un entier $s \geqslant 2$. Pour tout entier strictement positif k, on définit son *permuté* k' de la manière suivante : on écrit k sous la forme $as + b$, où a, b sont des entiers non négatifs tels que $b < s$, dès lors $k' = bs + a$. Étant donné un entier strictement positif n, on considère la suite infinie $d_1, d_2, \ldots$ où $d_1 = n$ et d_{i+1} est le permuté de d_i pour tout entier strictement positif i.

Montrer que cette suite contient un 1 si et seulement si le reste de la division de n par $s^2 - 1$ est soit 1, soit s.

Problème 6. Soit ABC un triangle dont Ω est le cercle circonscrit. Soient S_b et S_c les milieux respectifs des arcs $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{AB}$ qui ne contiennent pas le troisième sommet de ABC. Soit N_a le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ contenant A. Soit I le centre du cercle inscrit à ABC. Soit ω_b le cercle tangent à AB et tangent intérieurement à Ω en S_b, et soit ω_c le cercle tangent à AC et tangent intérieurement à Ω en S_c. Montrer que la droite IN_a et la droite passant par les intersections de ω_b et ω_c se coupent sur Ω.

Le cercle inscrit à un triangle est le cercle qui est tangent aux trois côtés du triangle.

Language: French

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points.

Les problèmes sont confidentiels jusqu'au dimanche 16 avril, 22:00 UTC (00:00 (lundi) Central European Summer Time).