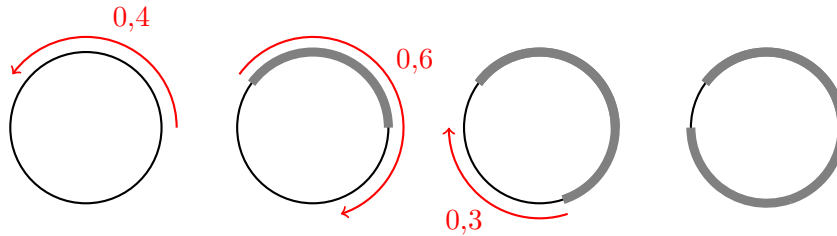


Sunnuntaina 16.4.2023

Tehtävä 4. Turbo-etana on ympyrän kehällä. Kehän pituus on 1. Kun Turbo-etanalle annetaan ääretön jono positiivisia reaalilukuja c_1, c_2, c_3, \dots , Turbo-etana liikkuu lukujen c_1, c_2, c_3, \dots verran ympyrän kehällä, joka kerta valiten erikseen menevänsä joko myötä- tai vastapäivään.

Esimerkiksi, jos jono olisi $c_1; c_2; c_3; \dots$ on $0,4; 0,6; 0,3; \dots$, niin Turbo saattaisi edetä seuraavalla tavalla:



Määritä suurin vakio $C > 0$, jolla on seuraava ominaisuus: jokaisella reaalilukujonolla c_1, c_2, c_3, \dots , jolla $c_i < C$ kaikilla i , Turbo-etana voi (tarkasteltuaan jonoa) varmistaa, että ympyrän kehällä on jokin piste, johon se ei koskaan osu, ja jonka yli se ei koskaan liiku.

Tehtävä 5. Olkoon $s \geq 2$ annettu positiivinen kokonaisluku. Jokaisella positiivisella kokonaisluvulla k määritellään sen *käännös* k' seuraavasti: kirjoitetaan k muodossa $as+b$, missä a, b ovat epänegatiivisia kokonaislukuja ja $b < s$. Silloin $k' = bs+a$. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan ääretöntä jonoa d_1, d_2, \dots missä $d_1 = n$ ja d_{i+1} on luvun d_i käännös kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla i .

Osoita, että tässä jonossa on luku 1 jos ja vain jos jakojäännös on 1 tai s , kun luku n jaetaan luvulla $s^2 - 1$.

Tehtävä 6. Olkoon ABC kolmio, jonka ympäröity ympyrä on Ω . Olkoot S_b ja S_c (tässä järjestyksessä) keskipisteet niillä kaarilla AC ja AB , joilla ei ole kolmatta kärkeä. Olkoon N_a keskipiste kaarella BAC (se kaari BC , joka sisältää pisteen A). Olkoon I kolmion ABC sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste. Olkoon ω_b se ympyrä, joka sivuaa suoraa AB ja sisäpuolelta sivuaa ympyrää Ω pisteessä S_b , ja olkoon ω_c se ympyrä, joka sivuaa suoraa AC ja sisäpuolelta sivuaa ympyrää Ω pisteessä S_c . Osoita, että suora IN_a , ja ympyröiden ω_b ja ω_c leikkauspisteiden kautta kulkeva suora leikkaavat toisensa ympyrällä Ω .

Kolmion sisäänpiirretty ympyrä on se ympyrä, joka on kolmion sisällä ja sivuaa kolmion kaikkia sivuja.

Language: Finnish

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

Tehtävät on pidettävä salassa 16. huhtikuuta klo 22:00 UTC asti (00:00 (maanantai) Keski-Euroopan kesäaikaa).