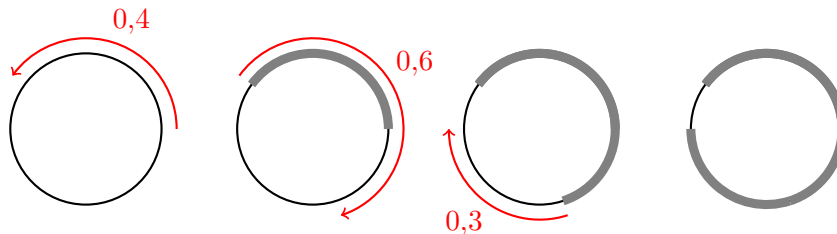


Zondag 16 April 2023

Opgave 4. Turbo de slak zit op een punt op een cirkel met omtrek 1. Voor een gegeven oneindig rijtje van (strikt) positieve reële getallen c_1, c_2, c_3, \dots glijdt Turbo achtereenvolgens de afstanden c_1, c_2, c_3, \dots op de cirkel, waarbij zij iedere keer mag kiezen om met de klok mee of tegen de klok in te glijden.

Bekijk bijvoorbeeld het geval waarin $c_1 = 0,4$; $c_2 = 0,6$; $c_3 = 0,3$; \dots , dan kan Turbo op de volgende manier beginnen met glijden:



Bepaal het grootste reële getal $C > 0$ dat aan de volgende eigenschap voldoet: voor elk oneindig rijtje van (strikt) positieve reële getallen c_1, c_2, c_3, \dots met $c_i < C$ voor alle i kan Turbo ervoor zorgen (door het rijtje goed te bestuderen) dat er minimaal één punt op de cirkel is die zij nooit bereikt en waar zij ook nooit langsglijdt.

Opgave 5. Zij $s \geq 2$ een geheel getal. Voor elk positief geheel getal k definiëren we zijn draaiing k' als volgt: Schrijf k als $as + b$ met a en b niet-negatieve gehele getallen en $b < s$. Dan is zijn draaiing $k' = bs + a$. Voor een positief geheel getal n bekijken we het oneindige rijtje d_1, d_2, \dots waar $d_1 = n$ en voor alle gehele $i \geq 1$ het getal d_{i+1} de draaiing is van d_i .

Bewijs dat dit rijtje het getal 1 bevat dan en slechts dan als de rest van n na deling door $s^2 - 1$ gelijk is aan 1 of s .

Opgave 6. Zij $\triangle ABC$ een driehoek met omgeschreven cirkel Ω . Laat S_b en S_c respectievelijk de middens van de bogen AC en AB zijn die niet het derde punt bevatten. Laat N_a het midden van de boog BC die het punt A bevat. Zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Zij ω_b de cirkel die AB raakt en ook Ω inwendig raakt in het punt S_b . Zij ω_c de cirkel die AC raakt en ook Ω inwendig raakt in het punt S_c . Bewijs dat de lijn (rechte) IN_a en de lijn (rechte) door de snijpunten van ω_b en ω_c elkaar snijden op Ω .

De ingeschreven cirkel van een driehoek is de cirkel die in de driehoek ligt en die raakt aan alle drie de zijden.

Language: Dutch

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten

Elke opgave is 7 punten waard.

Om de wedstrijd voor iedereen eerlijk en leuk te houden, is het verboden om op sociale media of op het internet de opgaven te publiceren of om daar naar de opgaven te verwijzen tot en met zondag 16 april 23:59 (Nederlandse en Sloveense tijd).