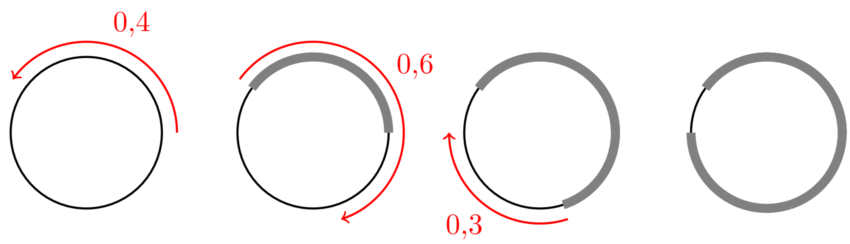
Language: **Danish**

Day: **2**

Søndag d. 16. april 2023

Opgave 4. Sneglen Turbo sidder i et punkt på en cirkel med omkreds 1. Der er givet en uendelig følge $c_1, c_2, c_3, \dots$ af positive reelle tal. Turbo kravler afstandene $c_1, c_2, c_3, \dots$ en efter en i denne rækkefølge langs cirkelperiferien, og for hver afstand vælger den om den vil kravle med eller mod uret.

Hvis for eksempel følgen $c_1, c_2, c_3, \dots$ er 0,4, 0,6, 0,3, ..., da kan Turbo starte med at kravle på denne måde:



Bestem den største konstant $C > 0$ med følgende egenskab: For hver følge af positive reelle tal $c_1, c_2, c_3, \dots$ med $c_i < C$ for alle i, kan Turbo (efter at have studeret følgen) sikre at der er et punkt på cirklen som den aldrig vil besøge eller kravle henover.

Opgave 5. Lad $s \geqslant 2$ være et positivt helt tal. For hvert positive hele tal k definerer vi dets *tvist* k' på følgende måde: Skriv k på formen $as + b$, hvor a og b er ikke-negative heltal med $b < s$, og sæt $k' = bs + a$. For det positive heltal n betragt den uendelige følge $d_1, d_2, \dots$ hvor $d_1 = n$ og d_{i+1} er tvistet af d_i for alle positive hele tal i.

Vis at følgen indeholder 1 hvis og kun hvis resten af n ved division med $s^2 - 1$ er enten 1 eller s.

Opgave 6. Lad ABC være en trekant og Ω dens omskrevne cirkel. Lad S_b og S_c betegne midtpunkterne af henholdsvis cirkelbuen AC som ikke indeholder B, og cirkelbuen AB som ikke indeholder C. Lad N_a betegne midtpunktet af cirkelbuen BAC (dvs. cirkelbuen BC som indeholder A). Lad I være centrum for den indskrevne cirkel til ABC. Lad ω_b være cirklen som tangerer AB og tangerer Ω indvendigt i punktet S_b, og lad ω_c være cirklen som tangerer AC og som tangerer Ω indvendigt i punktet S_c. Vis at linjen IN_a og linjen gennem skæringspunkterne mellem ω_b og ω_c skærer hinanden på Ω.

Den indskrevne cirkel til en trekant er cirklen inden i trekanten som tangerer alle dens tre sider.

Language: Danish

Varighed: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave er 7 point værd

Opgaverne er hemmelige indtil mandag d. 17. april 00:00 CEST.