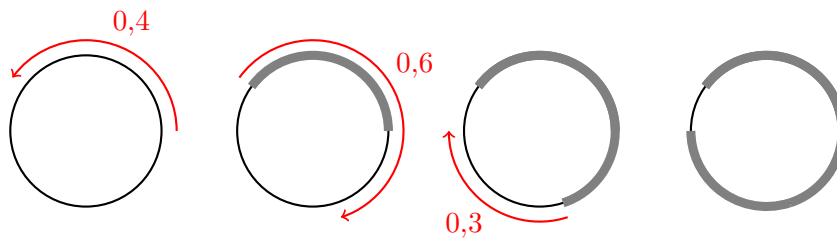


neděle 16. dubna 2023

Úloha 4. Šnek Turbo si lebedí v jednom bodě kružnice s obvodem 1. Pro danou nekonečnou posloupnost kladných reálných čísel c_1, c_2, c_3, \dots se Turbo postupně plazí o vzdálenosti c_1, c_2, c_3, \dots po kružnici, přičemž pokaždé si vybere, zda se chce plazit po směru, nebo proti směru pohybu hodinových ručiček.

Například pokud posloupnost c_1, c_2, c_3, \dots je $0,4; 0,6; 0,3; \dots$, pak se Turbo může plazit následujícím způsobem:



Určete největší konstantu $C > 0$ s následující vlastností: Když Turbo dostane posloupnost kladných reálných čísel c_1, c_2, c_3, \dots splňujících $c_i < C$ pro každé i , je schopen (poté, co si posloupnost prostuduje) zajistit, že na kružnici bude existovat bod, přes který se nikdy nepřepozadí, ani jej nenavštíví.

Úloha 5. Je dáno kladné celé číslo $s \geq 2$. Pro každé kladné celé číslo k definujeme jeho *obrácené* číslo k' následovně: Když napíšeme k jako $as + b$, kde a, b jsou nezáporná celá čísla a $b < s$, tak $k' = bs + a$. Pro kladné celé číslo n uvažujme nekonečnou posloupnost d_1, d_2, \dots , ve které $d_1 = n$ a d_{i+1} je obrácené číslo k číslu d_i pro každé kladné celé i .

Dokažte, že tato posloupnost obsahuje číslo 1 právě tehdy, když n dává po dělení číslem $s^2 - 1$ zbytek 1, nebo s .

Úloha 6. Necht Ω je kružnice opsaná trojúhelníku ABC . Označme S_b a S_c postupně středy oblouků AC a AB , které neobsahují třetí vrchol trojúhelníku. Označme N_a střed oblouku BAC (oblouk BC obsahující bod A). Střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC označme I . Nakonec ať ω_b značí kružnici, která se dotýká AB a má vnitřní dotyk s kružnicí Ω v bodě S_b , a podobně ať ω_c značí kružnici, která se dotýká AC a má vnitřní dotyk s kružnicí Ω v bodě S_c . Dokažte, že přímka IN_a se s přímkou procházející průsečíky kružnic ω_b a ω_c protíná na kružnici Ω .

Language: Czech

Čas: 4 hodiny a 30 minut

Za každou úlohu lze získat až 7 bodů

Úlohy jsou tajné do neděle 16. dubna 23:59. Do té doby o nich nediskutujte nikde na internetu.