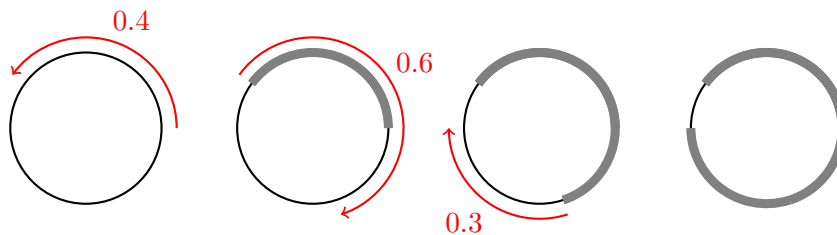


Nedjelja, 16. travnja 2023.

**Zadatak 4.** Puž imena Turbo sjedi u točki na kružnici opsega 1. Za dani beskonačan niz pozitivnih realnih brojeva  $c_1, c_2, c_3, \dots$ , Turbo puže po kružnici tako da za svaki  $i$ , u  $i$ -tom koraku prepuže udaljenost  $c_i$  oko kružnice, pri čemu u svakom koraku bira hoće li puzati u smjeru kazaljke na satu ili u smjeru suprotnom od kazaljke na satu.

Na primjer, ako je niz  $c_1, c_2, c_3, \dots$  jednak  $0.4, 0.6, 0.3, \dots$ , onda Turbo može započeti svoje puzanje na sljedeći način:



Odredi najveći realan broj  $C > 0$  sa sljedećim svojstvom: za svaki niz pozitivnih realnih brojeva  $c_1, c_2, c_3, \dots$  takav da je  $c_i < C$  za svaki  $i$ , Turbo može (nakon što prouči niz) svojim izborima osigurati da postoji točka na kružnici na koju nikad neće stati niti prepuzati preko nje.

**Zadatak 5.** Dan je prirodan broj  $s \geq 2$ . Za svaki prirodan broj  $k$ , definiramo njegov *twist*  $k'$  na sljedeći način: ako je  $k = as + b$ , gdje su  $a, b$  nenegativni cijeli brojevi takvi da je  $b < s$ , onda je  $k' = bs + a$ . Za prirodan broj  $n$ , promotrimo beskonačan niz  $d_1, d_2, \dots$  gdje je  $d_1 = n$  i  $d_{i+1}$  je twist od  $d_i$  za svaki prirodan broj  $i$ .

Dokaži da ovaj niz sadrži broj 1 ako i samo ako  $n$  daje ostatak 1 ili  $s$  pri dijeljenju sa brojem  $s^2 - 1$ .

**Zadatak 6.** Neka je  $ABC$  trokut s opisanom kružnicom  $\Omega$ . Neka su  $S_b$  i  $S_c$  redom polovišta lukova  $AC$  i  $AB$  koji ne sadrže treći vrh trokuta. Neka je  $N_a$  polovište luka  $BAC$  (odnosno luka  $BC$  koji sadrži točku  $A$ ). Neka je  $I$  središte upisane kružnice trokuta  $ABC$ . Neka je  $\omega_b$  kružnica koja je tangenta na  $AB$  i iznutra tangenta na  $\Omega$  u točki  $S_b$ , i neka je  $\omega_c$  kružnica koja je tangenta na  $AC$  i iznutra tangenta na  $\Omega$  u točki  $S_c$ . Dokaži da se pravac  $IN_a$  i pravac koji prolazi kroz točke presjeka kružnica  $\omega_b$  i  $\omega_c$  sijeku na  $\Omega$ .

*Upisana kružnica trokuta je kružnica koja je tangenta na sve tri njegove stranice.*