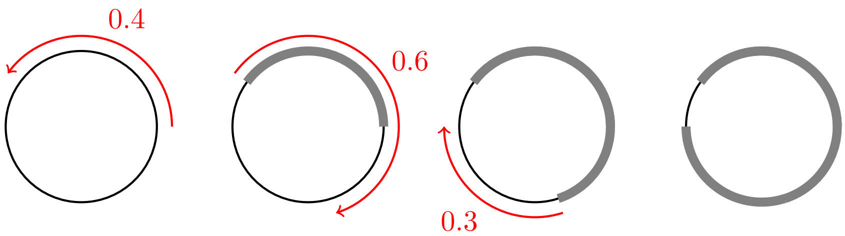
Неделя, 16 Април, 2023

Задача 4. Охлювът Турбо се намира в точка на окръжност с дължина 1. При дадена безкрайна редица от положителни реални числа $c_1, c_2, c_3, \ldots$, Турбо последователно изпълзява разстояния с дължини съответно $c_1, c_2, c_3, \ldots$ по окръжността, като всеки път избира дали да пълзи по или срещу часовниковата стрелка.

Например, ако редицата $c_1, c_2, c_3, \ldots$ е $0.4, 0.6, 0.3, \ldots$, тогава Турбо може да реши да пълзи по следния начин:



Определете най-голямата константа $C > 0$ със следното свойство: за всяка редица от положителни реални числа $c_1, c_2, c_3, \ldots$, изпълняващи $c_i < C$ за всяко i, Турбо може (след преглеждане на редицата) да осигури точка на окръжността, в която никога няма да стъпи или да мине през нея.

Задача 5. Дадено е естествено число $s \geqslant 2$. За всяко положително цяло число k дефинираме негов *туистър* k', както следва: ако запишем k като $as + b$, където a, b са неотрицателни цели числа и $b < s$, тогава $k' = bs + a$. За естественото число n разглеждаме безкрайната редица $d_1, d_2, \ldots$, където $d_1 = n$ и d_{i+1} е туистърът на d_i за всяко естествено число i.

Докажете, че редицата съдържа 1, тогава и само тогава когато остатъкът при деление на n със $s^2 - 1$ е 1 или s.

Задача 6. Даден е триъгълник ABC с описана окръжност Ω. Със S_b и S_c означаваме съответно средите на дъгите AC и AB, несъдържащи третия връх на триъгълника. Нека N_a е средата на дъгата BC, съдържаща A, а I е центърът на вписаната в ABC окръжност. Нека ω_b е окръжността, допираща се до AB и вътрешно допираща се до Ω в S_b, а ω_c е окръжността, допираща се до AC и вътрешно допираща се до Ω в S_c.
Докажете, че правата IN_a и правата, определена от пресечните точки на ω_b и ω_c, се пресичат в точка от Ω.

Language: Bulgarian

Време: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Задачите са забранени за разпространение до понеделник, 17 април, 01:00 българско време!