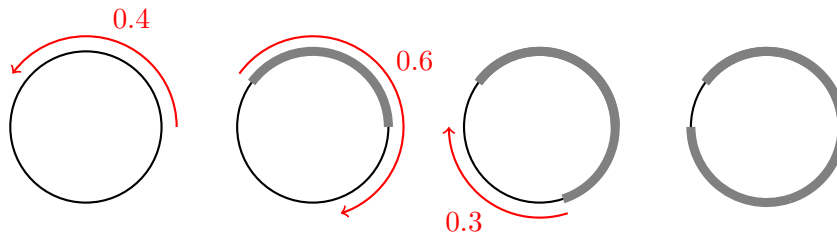


nedjelja, 16. april, 2023

Zadatak 4. Puž Turbo sjedi na nekoj tački kružnice obima 1. Za dati beskonačni niz pozitivnih realnih brojeva c_1, c_2, c_3, \dots , Turbo puže po kružnici tako da za svako i u i -tom koraku prepuzuje udaljenost c_i oko kružnice, pri čemu u svakom koraku bira da li će puzati u smjeru kretanja kazaljke na satu ili u suprotnom smjeru.

Na primjer, ako je niz c_1, c_2, c_3, \dots jednak $0.4, 0.6, 0.3, \dots$, Turbo može početi puzati na sljedeći način:



Odrediti najveću konstantu $C > 0$ sa sljedećom osobinom: za svaki niz pozitivnih realnih brojeva c_1, c_2, c_3, \dots takav da je $c_i < C$ za sve i , Turbo može osigurati (nakon što prouči niz) da postoji tačka na kružnici na koju nikad neće stati ni prepuzati preko.

Zadatak 5. Dat je prirodan broj $s \geq 2$. Za svaki prirodan broj k , definišemo njegov *twist* k' na sljedeći način: ako je $k = as + b$, gdje su a, b nenegativni cijeli brojevi takvi da je $b < s$, onda je $k' = bs + a$. Za prirodan broj n , posmatrajmo beskonačni niz d_1, d_2, \dots gdje $d_1 = n$ i d_{i+1} je twist broja d_i za svaki prirodan broj i .

Dokazati da ovaj niz sadrži broj 1 ako i samo ako n daje ostatak 1 ili s pri dijeljenju sa $s^2 - 1$.

Zadatak 6. Neka je ABC trougao sa opisanom kružnicom Ω . Neka su S_b i S_c redom sredine lukova AC i AB koji ne sadrže treći vrh trougla. Neka je tačka N_a sredina luka BAC (tj. luka BC koji sadrži tačku A). Neka je tačka I centar upisane kružnice trougla ABC . Neka je ω_b kružnica koja je tangenta na pravu AB i koja dodiruje kružnicu Ω iznutra u tački S_b . Neka je ω_c kružnica koja je tangenta na pravu AC i dodiruje kružnicu Ω iznutra u tački S_c . Dokazati da se prave IN_a i prava koja prolazi kroz presjek kružnica ω_b i ω_c sijeku na kružnici Ω .