

Субота, 15 квітня, 2023

**Задача 1.** Задано  $n \geq 3$  додатних дійсних чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Для кожного  $1 \leq i \leq n$  покладемо  $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$  (тут вважаємо, що  $a_0$  дорівнює  $a_n$ , а  $a_{n+1}$  дорівнює  $a_1$ ). Припустимо, що для всіх  $i$  та  $j$  від 1 до  $n$  справджується твердження:  $a_i \leq a_j$  тоді і тільки тоді, коли  $b_i \leq b_j$ .

Доведіть, що  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Задача 2.** Задано гострокутний трикутник  $ABC$ . Через  $D$  позначимо таку точку на його описаному колі, що  $AD$  – діаметр. Припустимо, що точки  $K$  та  $L$  належать відрізкам  $AB$  та  $AC$ , відповідно, і прямі  $DK$  та  $DL$  дотикаються до описаного кола трикутника  $AKL$ .

Доведіть, що пряма  $KL$  проходить через ортоцентр трикутника  $ABC$ .

*Ортоцентром трикутника називається точка перетину його висот.*

**Задача 3.** Нехай  $k$  – натуральне число. Гуска Стефанія має словник  $\mathcal{D}$ , що складається з декількох слів, кожне з яких містить лише літери  $A$  та  $B$  і має довжину  $k$ . Стефанія хоче записати у кожен клітинку таблиці  $k \times k$  літеру  $A$  або  $B$  так, щоб кожен стовпчик містив слово із словника  $\mathcal{D}$ , при читанні згори донизу, та кожен рядок містив слово із словника  $\mathcal{D}$  при читанні зліва направо.

Яке найменше ціле число  $m$  таке, що якщо словник  $\mathcal{D}$  містить хоча б  $m$  різних слів, то гуска Стефанія зможе заповнити свою табличку як описано вище, незалежно від того, які слова містяться у словнику  $\mathcal{D}$ ?