



Language: Spanish

Day: 1

Sábado, 15 de abril de 2023

Problema 1. Se tienen $n \geq 3$ números reales positivos a_1, a_2, \dots, a_n . Para cada $1 \leq i \leq n$ se define $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$, donde $a_0 = a_n$ y $a_{n+1} = a_1$. Suponga que para cada $1 \leq i \leq n$ y cada $1 \leq j \leq n$ se tiene que $a_i \leq a_j$ si y sólo si $b_i \leq b_j$.

Demuestre que $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea D el punto sobre su circunferencia circunscrita tal que AD sea un diámetro. Se escogen puntos K y L en los segmentos AB y AC respectivamente, tales que DK y DL son tangentes al círculo AKL .

Demuestre que la recta KL pasa por el ortocentro de ABC .

El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de sus alturas.

Problema 3. Sea k un entero positivo. Alexa tiene un diccionario \mathcal{D} que contiene algunas palabras de k letras formadas sólo con las letras A y B . En cada casilla de un tablero de tamaño $k \times k$, Alexa quiere escribir sólo la letra A o la letra B , de tal manera que cada columna contenga una palabra de \mathcal{D} cuando es leída de arriba a abajo y cada fila contenga una palabra de \mathcal{D} cuando es leída de izquierda a derecha.

¿Cuál es el menor entero m tal que si \mathcal{D} contiene por lo menos m palabras diferentes, entonces Alexa siempre puede llenar su tablero de esta manera, sin importar cuáles son las palabras que están en el diccionario \mathcal{D} ?

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Los problemas son confidenciales hasta el domingo 16 de abril a las 22:00 UTC (00:00 del lunes en Eslovenia).