



Language: Slovenian

Day: 1

*Sobota, 15. april 2023*

**Naloga 1.** Danih je  $n \geq 3$  pozitivnih realnih števil  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Za vsako naravno število  $1 \leq i \leq n$  naj bo  $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$  (pri tem definiramo  $a_0$  kot  $a_n$  in  $a_{n+1}$  kot  $a_1$ ). Denimo, da za vsaka  $i$  in  $j$  med 1 in  $n$  velja, da je  $a_i \leq a_j$  natanko tedaj, ko je  $b_i \leq b_j$ .

Pokaži, da je  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Naloga 2.** Naj bo  $ABC$  ostrokoten trikotnik in naj bo  $D$  taka točka na njegovi očrtani krožnici, da je  $AD$  premer. Recimo, da točki  $K$  in  $L$  zaporedoma ležita na stranicah  $AB$  in  $AC$  ter da sta  $DK$  in  $DL$  tangenti na krožnico očrtano trikotniku  $AKL$ .

Dokaži, da premica  $KL$  poteka skozi višinsko točko trikotnika  $ABC$ .

*Višinska točka trikotnika je presečišče njegovih višin.*

**Naloga 3.** Naj bo  $k$  naravno število. Lana ima slovar  $\mathcal{D}$ , ki vsebuje nekaj besed. Vsaka beseda je sestavljena iz  $k$  črk, ki so bodisi  $A$  bodisi  $B$ . Lana želi v vsako celico tabele velikosti  $k \times k$  napisati po eno izmed črk  $A$  in  $B$ , tako da vsak stolpec vsebuje besedo iz slovarja  $\mathcal{D}$ , če beremo od zgoraj navzdol, in vsaka vrstica vsebuje besedo iz slovarja  $\mathcal{D}$ , če beremo z leve proti desni.

Določi najmanjše tako naravno število  $m$ , da če  $\mathcal{D}$  vsebuje vsaj  $m$  različnih besed, lahko Lana zapolni svojo tabelo na opisan način ne glede na to, katere besede so v slovarju  $\mathcal{D}$ .

Language: Slovenian

Čas pisanja: 4 ure in 30 minut  
Vsaka naloga je vredna 7 točk

Naloge so tajne do nedelje, 16. aprila, do 22:00 UTC (00:00 (ponedeljek) srednjeevropski poletni čas).