Language: **Slovak**

Day: **1**

sobota, 15. apríla 2023

Úloha 1. Daných je $n \geq 3$ kladných reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (pracujeme s tým, že a_0 je a_n a súčasne a_{n+1} je a_1). Predpokladajme, že pre všetky $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $a_i \leq a_j$ práve vtedy, keď $b_i \leq b_j$.

Dokážte, že $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Úloha 2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Nech D je taký bod na kružnici opísanej trojuholníku ABC, že úsečka AD tvorí jej priemer. Predpokladajme, že body K a L ležia postupne na úsečkách AB a AC a že priamky DK a DL sa dotýkajú kružnice opísanej trojuholníku AKL.

Dokážte, že priamka KL prechádza ortocentrom trojuholníka ABC.

Ortocentrum trojuholníka je bod, v ktorom sa pretínajú jeho výšky.

Úloha 3. Dané je kladné celé číslo k. Darmoděj má slovník $\mathcal{D}$, ktorý obsahuje niekoľko k-znakových reťazcov zložených iba zo znakov A a B. Darmoděj by chcel do každého políčka tabuľky $k \times k$ napísať buď znak A, alebo znak B tak, aby každý stĺpec, čítaný zhora nadol, obsahoval nejaký reťazec z $\mathcal{D}$ a aby každý riadok, čítaný zľava doprava, tiež obsahoval nejaký reťazec z $\mathcal{D}$.

Nájdite najmenšie celé číslo m také, že pokiaľ $\mathcal{D}$ obsahuje aspoň m rôznych reťazcov, tak Darmoděj môže vyplniť tabuľku týmto spôsobom bez ohľadu na to, ktoré reťazce $\mathcal{D}$ obsahuje.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Za každú úlohu možno získať 7 bodov

Zadania úloh sú tajné do nedele 16. apríla o 24:00.