subota, 15.4.2023.

Zadatak 1. Neka je dato $n \geqslant 3$ pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Za svako $1 \leqslant i \leqslant n$, neka je $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (gde je $a_0 = a_n$, a $a_{n+1} = a_1$). Pretpostavimo da za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi: $a_i \leqslant a_j$ ako i samo ako $b_i \leqslant b_j$.

Dokazati da je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Zadatak 2. Dat je oštrougli trougao ABC. Neka je D tačka na opisanoj kružnici tog trougla takva da je AD prečnik kružnice. Pretpostavimo da tačke K i L leže na dužima AB i AC, respektivno, tako da su DK i DL tangente na kružnicu opisanu oko trougla AKL.

Dokazati da prava KL prolazi kroz ortocentar trougla ABC.

Ortocentar trougla je tačka preseka njegovih visina.

Zadatak 3. Neka je k prirodan broj. Aleksa ima rečnik $\mathcal{D}$ koji sadrži neke reči dužine k zapisane samo slovima A i B. Aleksa bi želeo da u svako polje tabele dimenzije $k \times k$ upiše ili slovo A ili slovo B, tako da je svaka kolona tabele, kada se čita od gore prema dole, reč iz $\mathcal{D}$, i da je svaki red, kada se čita sa leva na desno, reč iz $\mathcal{D}$.

Odrediti najmanji prirodan broj m tako da važi: Ako $\mathcal{D}$ sadrži bar m različitih reči, onda Aleksa može da popuni tabelu na goreopisani način, bez obzira koje reči su u $\mathcal{D}$.

Vreme za rad: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena.

Zadaci se ne smeju deliti ni objavljivati pre nedelje 16. aprila u 22:00 UTC (odnosno pre ponoći sa nedelje na ponedeljak po lokalnom vremenu).