



Language: Portuguese

Day: 1

Sábado, 15 de abril de 2023

**Problema 1.** São dados  $n \geq 3$  números reais positivos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Para cada  $1 \leq i \leq n$ , defina  $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$  (aqui, definimos  $a_0$  como  $a_n$ , e  $a_{n+1}$  como  $a_1$ ). Suponha que, para todo  $i$  e  $j$  inteiros no intervalo de 1 a  $n$ , temos  $a_i \leq a_j$  se, e somente se,  $b_i \leq b_j$ .

Mostre que  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Problema 2.** Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo. Seja  $D$  o ponto no seu circuncírculo tal que  $AD$  é um diâmetro. Suponha que os pontos  $K$  e  $L$  pertencem aos segmentos  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, e que  $DK$  e  $DL$  são tangentes ao circuncírculo do triângulo  $AKL$ .

Mostre que a reta  $KL$  passa pelo ortocentro de  $ABC$ .

*O ortocentro de um triângulo é o ponto de interseção das suas alturas.*

**Problema 3.** Seja  $k$  um inteiro positivo. Alexa tem um dicionário  $\mathcal{D}$  que consiste em sequências de  $k$  letras, formadas apenas com as letras  $A$  e  $B$ . Lexi gostaria de escrever as letras  $A$  ou  $B$  em cada casa de um tabuleiro  $k \times k$  de modo que cada coluna contém uma palavra de  $\mathcal{D}$  quando lida de cima para baixo e cada linha contém uma palavra de  $\mathcal{D}$  quando lida da esquerda para a direita.

Qual o menor valor inteiro de  $m$  de modo que se  $\mathcal{D}$  possui pelo menos  $m$  palavras diferentes, então Alexa consegue preencher seu tabuleiro como deseja, independentemente das palavras em  $\mathcal{D}$ ?

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos  
Cada problema vale 7 pontos

Os problemas são confidenciais até domingo 16 de abril, 22:00 UTC (19:00, horário de Brasília).