



Language: Portuguese

Day: 1

Sábado, 15 de abril de 2023

Problema 1. São dados $n \geq 3$ números reais positivos a_1, a_2, \dots, a_n . Para cada $1 \leq i \leq n$, defina $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (aqui, definimos a_0 como a_n , e a_{n+1} como a_1). Suponha que, para todo i e j inteiros no intervalo de 1 a n , temos $a_i \leq a_j$ se, e somente se, $b_i \leq b_j$.

Mostre que $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Problema 2. Seja ABC um triângulo acutângulo. Seja D o ponto no seu circuncírculo tal que AD é um diâmetro. Suponha que os pontos K e L pertencem aos segmentos AB e AC , respectivamente, e que DK e DL são tangentes ao circuncírculo do triângulo AKL .

Mostre que a reta KL passa pelo ortocentro de ABC .

O ortocentro de um triângulo é o ponto de interseção das suas alturas.

Problema 3. Seja k um inteiro positivo. Alexa tem um dicionário \mathcal{D} que consiste em sequências de k letras, formadas apenas com as letras A e B . Lexi gostaria de escrever as letras A ou B em cada casa de um tabuleiro $k \times k$ de modo que cada coluna contém uma palavra de \mathcal{D} quando lida de cima para baixo e cada linha contém uma palavra de \mathcal{D} quando lida da esquerda para a direita.

Qual o menor valor inteiro de m de modo que se \mathcal{D} possui pelo menos m palavras diferentes, então Alexa consegue preencher seu tabuleiro como deseja, independentemente das palavras em \mathcal{D} ?

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Os problemas são confidenciais até domingo 16 de abril, 22:00 UTC (19:00, horário de Brasília).