Sobota, 15 kwietnia 2023

Zadanie 1. Danych jest $n \geqslant 3$ liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Niech $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ (przyjmujemy, że a_0 jest równe a_n oraz że a_{n+1} jest równe a_1). Załóżmy, że dla wszystkich i, j w zakresie od 1 do n zależność $a_i \leqslant a_j$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $b_i \leqslant b_j$.

Wykazać, że $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech D będzie takim punktem na okręgu opisanym na ABC, że AD jest jego średnicą. Załóżmy, że K i L są takimi punktami na odcinkach AB i AC, odpowiednio, że proste DK oraz DL są styczne do okręgu opisanego na trójkącie AKL.

Udowodnić, że prosta KL przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC.

Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia jego wysokości.

Zadanie 3. Dana jest dodatnia liczba całkowita k. Kasia ma słownik $\mathcal{D}$ zawierający k-literowe słowa złożone wyłącznie z liter A oraz B. Kasia chciałaby wpisać w każde pole tablicy $k \times k$ literę A lub B tak, aby każda kolumna czytana od góry do dołu zawierała słowo z $\mathcal{D}$ oraz aby każdy wiersz czytany od lewej do prawej zawierał słowo z $\mathcal{D}$.

Jaka jest najmniejsza liczba całkowita m taka, że jeśli $\mathcal{D}$ zawiera co najmniej m różnych słów, to Kasia może wypełnić tablicę w opisany sposób, niezależnie od zawartości słownika $\mathcal{D}$?

Czas pracy: 4 godziny 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów

Zadania są utajnione do niedzieli 16 kwietnia, do godziny 22:00 czasu UTC (do północy z 16-ego na 17-ego kwietnia czasu środkowoeuropejskiego).