Language: **Macedonian**

Day: **1**

Сабота, 15 април, 2023

Задача 1. Дадени се $n \geqslant 3$ позитивни реални броеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За секое $1 \leqslant i \leqslant n$ се дефинира $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (притоа земаме дека a_0 е еднакво со a_n и a_{n+1} е еднакво со a_1). Претпоставуваме дека за секои i и j од 1 до n важи $a_i \leqslant a_j$ ако и само ако $b_i \leqslant b_j$.

Докажи дека $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Задача 2. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека D е точка на неговата опишана кружница таква што отсечката AD е нејзин дијаметар. Нека точките K и L лежат на отсечките AB и AC, соодветно, и нека DK и DL се тангенти за кружницата AKL.

Докажи дека правата KL минува низ ортоцентарот на триаголникот ABC.

Ортоцентар на триаголник е пресечната точка на висините на триаголникот.

Задача 3. Нека k е природен број. Лекси има речник $\mathcal{D}$ кој се состои од зборови со должина k, запишани само со буквите A и B. Лекси сака да пополни мрежа со $k \times k$ полиња, запишувајќи ги само буквите A или B во секоја од ќелиите на мрежата, така што секоја колона содржи збор од $\mathcal{D}$ кога читаме од горе надолу и секој ред содржи збор од $\mathcal{D}$ кога читаме од лево на десно.

Кој е најмалиот цел број m таков што ако $\mathcal{D}$ содржи најмалку m различни зборови, тогаш Лекси може да ја пополни мрежата на горе наведениот начин, без разлика кои зборови се во $\mathcal{D}$?

Време: 4 часа и 30 минути
Секоја задача носи 7 поени

Проблемите се од доверлива природа заклучно со недела, 16 април, 22:00 UTC (00:00 (понеделник) по централно европско време (CET)).