

Sestdiena, 2023. gada 15. aprīlis

1.uzdevums. Doti $n \geq 3$ pozitīvi reāli skaitļi a_1, a_2, \dots, a_n . Katram $1 \leq i \leq n$ izpildās $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (šeit a_0 definējam ar a_n un a_{n+1} - ar a_1). Pieņemam, ka katram $1 \leq i \leq n$ un katram $1 \leq j \leq n$ izpildās, ka $a_i \leq a_j$ tad un tikai tad, ja $b_i \leq b_j$.

Pierādīt, ka $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2.uzdevums. Trijstūris ABC ir šaurleņķa. Uz riņķa līnijas, kas apvilka ap trijstūri ABC , atlikts tāds punkts D , ka AD ir riņķa līnijas diametrs. Uz hordām AB un AC atlikti attiecīgi tādi punkti K un L , ka DK un DL ir riņķa līnijas, kas apvilka ap trijstūri AKL , pieskares.

Pierādīt, ka trijstūra ABC ortocentrs atrodas uz taisnes KL .

Par ortocentru sauc trijstūra augstumu krustpunktu.

3.uzdevums. Dots, ka k ir naturāls skaitlis. Leksijai pieder vārdnīca \mathcal{D} , kurā ir dažas k -burtu virknes, kas sastāv tikai no burtiem A un B . Leksija gribētu uzrakstīt vai nu burtu A , vai burtu B katrā $k \times k$ rūtiņu režģa rūtiņā tā, ka katrā kolonnā ir virkne no vārdnīcas \mathcal{D} , lasot no augšas uz leju, un katrā rindā ir virkne no vārdnīcas \mathcal{D} , lasot no kreisās uz labo pusi.

Kāds ir mazākais naturālais skaitlis m , kuram, ja vārdnīca \mathcal{D} sastāv vismaz no m dažādām virknēm, tad Leksija var aizpildīt rūtiņu režģi neatkarīgi no tā, kādas virknes ir vārdnīcā \mathcal{D} ?