

2023 年 4 月 15 日 土曜日

問題 1. $n \geq 3$ 個の正の実数 a_1, a_2, \dots, a_n がある. 1 以上 n 以下の自然数 i について, 実数 b_i を $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ で定める. ただし, $a_0 = a_n, a_{n+1} = a_1$ とする.

1 以上 n 以下の整数 i, j について, $a_i \leq a_j$ となることと $b_i \leq b_j$ となることが同値になっているとする. このとき, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ となることを示せ.

問題 2. 鋭角三角形 ABC がある. D を三角形 ABC の外接円上の点であって, AD が直径になるようなものとする. 点 K, L はそれぞれ線分 AB, AC 上の点であり, 直線 DK, DL は三角形 AKL の外接円に接しているとする.

このとき, 直線 KL は三角形 ABC の垂心を通ることを示せ.

ただし, 垂心とは三角形の各頂点から対辺におろした垂線 3 本の交点である.

問題 3. k を正の整数とする. レクシーは, 文字 A, B のみからなる k 文字の文字列いくつかからなる辞書 D を持っている. レクシーは, $k \times k$ のマス目の各マスに A, B のいずれかを書き込むことで, 各縦列を上から下に読むことで得られる文字列, 各横列を左から右に読むことで得られる文字列がすべて D に含まれているようにしたい.

このとき, 以下の条件をみたす整数 m としてありうる最小のものを求めよ.

D に少なくとも m 個の文字列が含まれていれば, D に含まれている文字列にかかわらず, レクシーは上記の条件をみたすようにマス目を文字で埋めることができる.