



Language: Japanese

Day: 1

2023 年 4 月 15 日 土曜日

問題 1.  $n \geq 3$  個の正の実数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  がある. 1 以上  $n$  以下の自然数  $i$  について, 実数  $b_i$  を  $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$  で定める. ただし,  $a_0 = a_n, a_{n+1} = a_1$  とする.

1 以上  $n$  以下の整数  $i, j$  について,  $a_i \leq a_j$  となることと  $b_i \leq b_j$  となることが同値になっているとする. このとき,  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  となることを示せ.

問題 2. 鋭角三角形  $ABC$  がある.  $D$  を三角形  $ABC$  の外接円上の点であって,  $AD$  が直径になるようなものとする. 点  $K, L$  はそれぞれ線分  $AB, AC$  上の点であり, 直線  $DK, DL$  は三角形  $AKL$  の外接円に接しているとする.

このとき, 直線  $KL$  は三角形  $ABC$  の垂心を通ることを示せ.

ただし, 垂心とは三角形の各頂点から対辺におろした垂線 3 本の交点である.

問題 3.  $k$  を正の整数とする. レクシーは, 文字  $A, B$  のみからなる  $k$  文字の文字列いくつかからなる辞書  $D$  を持っている. レクシーは,  $k \times k$  のマス目の各マスに  $A, B$  のいずれかを書き込むことで, 各縦列を上から下に読むことで得られる文字列, 各横列を左から右に読むことで得られる文字列がすべて  $D$  に含まれているようにしたい.

このとき, 以下の条件をみたす整数  $m$  としてありうる最小のものを求めよ.

$D$  に少なくとも  $m$  個の文字列が含まれていれば,  $D$  に含まれている文字列にかかわらず, レクシーは上記の条件をみたすようにマス目を文字で埋めることができる.

Language: Japanese

時間: 4 時間 30 分  
各問 7 点

問題は 4 月 17 日 (月曜日) の日本標準時 7 時 (協定世界時 4 月 16 日 22 時) まで秘匿すること.