



Language: Hungarian

Day: 1

2023. április 15. szombat

Feladat 1. Adott $n \geq 3$ darab pozitív valós szám a_1, a_2, \dots, a_n . Minden $1 \leq i \leq n$ -re legyen $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (itt az a_0 -t a_n -nek definiáljuk, az a_{n+1} -et pedig a_1 -nek). Tegyük fel, hogy tetszőleges $1 \leq i, j \leq n$ esetén $a_i \leq a_j$ pontosan akkor teljesül, ha $b_i \leq b_j$ teljesül.

Bizonyítsuk be, hogy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Feladat 2. Adott az ABC hegyesszögű háromszög. Legyen D az a pont a körülírt körén, amire AD átmérő. A K és L pontok rendre az AB illetve AC szakaszokon helyezkednek el úgy, hogy DK és DL érintik az AKL háromszög körülírt körét.

Bizonyítsuk be, hogy a KL egyenes átmegy az ABC háromszög magasságpontján.

Egy háromszög magasságpontja a magasságvonalak metszéspontja.

Feladat 3. Legyen k egy pozitív egész szám. Lexinek van egy \mathcal{D} szótára, ami valahány k betűs szóból áll és minden szó csak az A és B betűket tartalmazza. Lexi szeretné egy $k \times k$ -as rács minden mezőjébe vagy az A vagy a B betűt beleírni úgy, hogy mindegyik oszlop egy \mathcal{D} -beli szót tartalmazzon felülről lefelé olvasva, és mindegyik sor egy \mathcal{D} -beli szót tartalmazzon balról jobbra olvasva.

Mi az a legkisebb m egész amire teljesül, hogy ha \mathcal{D} tartalmaz legalább m különböző szót, akkor Lexi ki tudja tölteni a rácsot ezen a módon, függetlenül attól, hogy milyen szavak vannak \mathcal{D} -ben?

Language: Hungarian

Idő: 4 óra 30 perc
Minden feladat 7 pontot ér

A feladatok titkosak április 16. vasárnap 22:00 UTC-ig (magyar idő szerint éjfélig).