

יום שבת, 15 באפריל, 2023

שאלה 1. נתונים $n \geq 3$ מספרים ממשיים חיוביים a_1, a_2, \dots, a_n . לכל $1 \leq i \leq n$ נגדיר $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (כאשר מגדירים באופן ציקלי ש- $a_0 = a_n$ ו- $a_{n+1} = a_1$). נתון כי לכל $i, j \in \{1, \dots, n\}$ מתקיים $a_i \leq a_j$ אם ורק אם $b_i \leq b_j$.

הוכיחי כי $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

שאלה 2. נתון משולש חד זוויות ABC . נסמן ב- D את הנקודה על המעגל החוסם של המשולש עבורה AD הוא קוטר של המעגל. נתון כי הנקודות K ו- L נמצאות על הקטעים AB ו- AC , בהתאמה, וכן שהישרים DK ו- DL משיקים למעגל AKL .

הוכיחי כי הישר KL עובר דרך מפגש הגבהים במשולש ABC .

שאלה 3. יהא k שלם חיובי. למילי יש מילון \mathcal{D} המכיל מספר מחרוזות, אשר כל אחת באורך k ומורכבת מהאותיות A ו- B בלבד. מילי רוצה לכתוב את אחת האותיות A או B בכל תא של טבלה בגודל $k \times k$, כך שכל עמודה תכיל מילה מ- \mathcal{D} שכתובה מלמעלה למטה, וכל שורה תכיל מילה מ- \mathcal{D} שכתובה משמאל לימין.

מהו השלם הקטן ביותר m עבורו מתקיים שאם \mathcal{D} מכיל לפחות m מחרוזות שונות, מילי תוכל למלא את הטבלה בהתאם לרצונה, ללא תלות באילו מחרוזות נמצאות ב- \mathcal{D} ?

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות

על השאלות להישאר חסויות עד יום ראשון ה-16 באפריל, 22:00 שעות UTC (00:00 (יום שני) בסלובניה).