Language: **Greek**

Day: **1**

Σάββατο, 15 Απριλίου, 2023

Πρόβλημα 1. Έστω $n \geqslant 3$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$ θέτουμε

$$b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$$

(εδώ ορίζουμε το a_0 να είναι το a_n και το a_{n+1} να είναι το a_1).
Υποθέτουμε ότι για όλα τα i και j με $1 \leqslant i, j \leqslant n$, έχουμε $a_i \leqslant a_j$ αν και μόνο αν $b_i \leqslant b_j$.

Να αποδείξετε ότι $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ένα οξυγώνιο τρίγωνο ABC. Έστω D το σημείο στον περιγεγραμμένο κύκλο του, τέτοιο ώστε η AD να είναι διάμετρος. Έστω τα σημεία K και L στα τμήματα AB και AC, αντίστοιχα, τέτοια ώστε οι DK και DL να είναι εφαπτόμενες στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AKL.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία KL διέρχεται από το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC.

Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των υψών του.

Πρόβλημα 3. Έστω k ένας θετικός ακέραιος. Η Αλεξία έχει ένα λεξικό $\mathcal{D}$ που αποτελείται από κάποιες σειρές k γραμμάτων που περιέχουν μόνο τα γράμματα A και B. Η Αλεξία θα επιθυμούσε να γράψει είτε το γράμμα A είτε το γράμμα B σε κάθε κελί ενός $k \times k$ πλέγματος έτσι ώστε κάθε στήλη να περιέχει μια σειρά του $\mathcal{D}$, όταν διαβαστεί από πάνω προς τα κάτω και κάθε γραμμή να περιέχει μια σειρά του $\mathcal{D}$, όταν διαβαστεί από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Ποιος είναι ο ελάχιστος ακέραιος m τέτοιος ώστε αν το $\mathcal{D}$ περιέχει τουλάχιστον m διαφορετικές σειρές, τότε η Αλεξία να μπορεί να συμπληρώσει το πλέγμα της με αυτό τον τρόπο, ανεξάρτητα από τις σειρές που υπάρχουν στο $\mathcal{D}$;

Γλώσσα: Ελληνικά

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 7 μονάδες

Τα προβλήματα είναι εμπιστευτικά έως την Κυριακή 16 Απριλίου 22:00 UTC (00:00 (Δευτέρα) Θερινή Ώρα Κεντρικής Ευρώπης).