



Language: German

Day: 1

Samstag, 15. April 2023

Aufgabe 1. Sei $n \geq 3$ und seien a_1, a_2, \dots, a_n positive reelle Zahlen. Für alle $1 \leq i \leq n$ sei $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (wobei $a_0 = a_n$ und $a_{n+1} = a_1$). Man nehme an, für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt, dass $a_i \leq a_j$ genau dann wenn $b_i \leq b_j$.

Zeige, dass $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Aufgabe 2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und D der Punkt auf seinem Umkreis, sodass AD ein Durchmesser ist. Seien K und L Punkte auf den Strecken AB bzw. AC , sodass DK und DL Tangenten des Umkreises von AKL sind.

Zeige, dass der Höhenschnittpunkt von ABC auf der Gerade KL liegt.

Aufgabe 3. Sei k eine positive ganze Zahl. Ein *Wort* ist eine Buchstabenfolge der Länge k , in der jeder Buchstabe entweder A oder B ist. Lexi hat ein Wörterbuch \mathcal{D} , in dem einige Wörter stehen. Sie möchte in jedes Feld eines $k \times k$ Gitters entweder den Buchstaben A oder den Buchstaben B schreiben, sodass in jeder Spalte von oben nach unten gelesen ein Wort aus \mathcal{D} steht und in jeder Zeile von links nach rechts gelesen ein Wort aus \mathcal{D} steht.

Was ist die kleinste ganze Zahl m , sodass wenn \mathcal{D} mindestens m verschiedene Wörter enthält, Lexi das Gitter auf die beschriebene Weise füllen kann, unabhängig davon, welche Wörter in \mathcal{D} sind?

Language: German

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert

Die Aufgaben sind vertraulich zu behandeln bis Montag, den 17. April, 0:00 Uhr mittelp-europäischer Sommerzeit.