Language: **French**

Day: **1**

Samedi, 15 avril, 2023

Problème 1. Soient n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, avec $n \geqslant 3$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, soit $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (ici, on identifie a_0 à a_n et a_{n+1} à a_1). De plus, on suppose que pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a $a_i \leqslant a_j$ si et seulement si $b_i \leqslant b_j$.

Prouver que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Problème 2. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Soit D le point sur son cercle circonscrit tel que $[AD]$ soit un diamètre. Soient K et L les points respectivement sur les segments $[AB]$ and $[AC]$, tels que les droites DK et DL soient tangentes au cercle circonscrit à AKL.

Montrer que la droite KL passe par l'orthocentre de ABC.

L'orthocentre d'un triangle est le point d'intersection de ses hauteurs.

Problème 3. Soit k un entier strictement positif. Lexie a un dictionnaire $\mathcal{D}$ composé de chaînes de k lettres utilisant uniquement les lettres A et B. Dans chaque case d'une grille $k \times k$, Lexie voudrait écrire soit une lettre A, soit une lettre B, de sorte que chaque colonne lue de haut en bas contienne une chaîne de $\mathcal{D}$, et de même pour chaque ligne, lue de gauche à droite.

Quel est le plus petit entier m tel que si $\mathcal{D}$ contient au moins m chaînes différentes, alors Lexie peut compléter sa grille selon ces règles, peu importe les chaînes contenues dans $\mathcal{D}$?

Language: French

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points.

Les problèmes sont confidentiels jusqu'au dimanche 16 avril, 22:00 UTC (00:00 (lundi) Central European Summer. Time).