



Language: Finnish

Day: 1

Lauantaina 15.4.2023

Tehtävä 1. Tarkastellaan $n \geq 3$ positiivista reaalilukua a_1, a_2, \dots, a_n . Kullakin $1 \leq i \leq n$ määritellään $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (oletetaan lisäksi, että $a_0 = a_n$ ja $a_{n+1} = a_1$). Oletetaan, että kaikilla i ja j , jotka toteuttavat ehdon $1 \leq i, j \leq n$, pätee $a_i \leq a_j$ jos ja vain jos $b_i \leq b_j$.

Todista, että $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Tehtävä 2. Tarkastellaan teräväkulmaista kolmiota ABC . Olkoon D se piste kolmion ABC ympäripiirretyllä ympyrällä, että AD on halkaisija. Oletetaan, että pisteet K ja L ovat janoilla AB ja AC (tässä järjestyksessä) ja että DK ja DL ovat ympyrän AKL tangentteja.

Osoita, että suora KL kulkee kolmion ABC ortokeskuksen läpi.

Kolmion ortokeskus on kolmion korkeusjanojen leikkauspiste.

Tehtävä 3. Olkoon k positiivinen kokonaisluku. Lexillä on sanasto \mathcal{D} , joka sisältää joitakin k merkin pituisia jonoja, jotka muodostuvat vain kirjaimista A ja B . Lexi haluaisi kirjoittaa kirjaimen A tai kirjaimen B jokaiseen $k \times k$ -ruudukon ruutuun niin, että jokainen sarake muodostaa sanastoon \mathcal{D} kuuluvan sanan luettaessa ylhäältä alaspäin ja jokainen rivi muodostaa sanastoon \mathcal{D} kuuluvan sanan luettaessa vasemmalta oikealle.

Mikä on pienin kokonaisluku m niin, että jos \mathcal{D} sisältää vähintään m eri jonoa, niin Lexi pystyy täyttämään ruudukon näin riippumatta siitä, mitkä jonot on sanastossa \mathcal{D} ?

Language: Finnish

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

Tehtävät on pidettävä salassa sunnuntaihin 16. huhtikuuta klo 22:00 UTC asti (00:00 (maanantai) Keski-Euroopan kesäaikaa).