

Laupäev, 15. aprill 2023

Ülesanne 1. Antud on $n \geq 3$ positiivset reaalarvu a_1, a_2, \dots, a_n . Olgu $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ iga $1 \leq i \leq n$ jaoks (olgu a_0 sama, mis a_n , ja a_{n+1} sama, mis a_1). On teada, et iga i ja j jaoks ($1 \leq i \leq n$ ja $1 \leq j \leq n$) on $a_i \leq a_j$ siis ja ainult siis, kui $b_i \leq b_j$.

Tõesta, et $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Ülesanne 2. Antud on teravnurkne kolmnurk ABC ja punkt D selle ümberringjoonel, kusjuures AD on ringjoone diameeter. Punktid K ja L asuvad vastavalt lõikudel AB ja AC , kusjuures sirged DK ja DL on kolmnurga AKL ümberringjoone puutujateks.

Näita, et sirge KL läbib kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkti.

Ülesanne 3. Olgu k positiivne täisarv. Lexil on sõnaraamat \mathcal{D} , mis koosneb k -tähelistest sõnedest (tähejadadest). Iga sõne sisaldab ainult tähti A ja B . Lexi tahab kirjutada $k \times k$ ruudustiku igasse lahtrisse kas A või B tähe sellisel viisil, et igas tulbas on ülevalt alla lugedes mõni sõnaraamatus \mathcal{D} sisalduv sõne ning igas reas on vasakult paremale lugedes mõni sõnaraamatus \mathcal{D} sisalduv sõne.

Mis on vähim täisarv m , mille puhul on kindel, et kui \mathcal{D} sisaldab vähemalt m erinevat sõnet, siis on Lexil võimalik ruudustik soovitud viisil täita, olenemata sellest, mis sõned on sõnaraamatus \mathcal{D} ?