sobota 15. dubna 2023

Úloha 1. Mějme posloupnost $n \geq 3$ kladných reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (přičemž a_0 definujeme jako a_n a a_{n+1} jako a_1). Předpokládejme, že pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $a_i \leq a_j$ právě tehdy, když $b_i \leq b_j$.

Dokažte, že $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Úloha 2. Uvažujme ostroúhlý trojúhelník ABC. Na kružnici jemu opsané označme D takový bod, že AD je průměr této kružnice. Předpokládejme, že body K a L leží postupně na úsečkách AB a AC a že DK i DL jsou tečny ke kružnici opsané trojúhelníku AKL.

Dokažte, že přímka KL prochází ortocentrem trojúhelníku ABC.

Ortocentrum trojúhelníku je průsečík jeho výšek.

Úloha 3. Buď k kladné celé číslo. Lexi má slovník $\mathcal{D}$ obsahující několik k-znakových řetězců složených pouze ze znaků A a B. Lexi si přeje do každého políčka tabulky $k \times k$ napsat znak A, nebo B tak, aby každý sloupec obsahoval řetězec z $\mathcal{D}$, když jej čteme shora dolů, a také aby každý řádek obsahoval řetězec z $\mathcal{D}$, když jej čteme zleva doprava.

Najděte nejmenší číslo m takové, že pokud $\mathcal{D}$ obsahuje alespoň m různých řetězců, pak Lexi může vyplnit svou tabulku popsaným způsobem, ať už jsou řetězce v $\mathcal{D}$ jakékoliv.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat až 7 bodů

Úlohy jsou tajné do neděle 16. dubna 23:59. Do té doby o nich nediskutujte nikde na internetu.