

Subota, 15. travnja 2023

**Zadatak 1.** Dano je  $n \geq 3$  pozitivnih realnih brojeva  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Za svaki  $1 \leq i \leq n$  definiramo  $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$  (ovdje pretpostavljamo da je  $a_0 = a_n$  i  $a_{n+1} = a_1$ ). Pretpostavimo da za sve brojeve  $i, j$  iz skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$  vrijedi da je  $a_i \leq a_j$  ako i samo ako je  $b_i \leq b_j$ .

Dokaži da je  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Zadatak 2.** Dan je šiljastokutan trokut  $ABC$ . Neka je  $D$  točka na opisanoj kružnici tog trokuta tako da je  $\overline{AD}$  promjer te kružnice. Pretpostavimo da točke  $K$  i  $L$  leže redom na dužinama  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ , te da su  $DK$  i  $DL$  tangente na kružnicu opisanu trokutu  $AKL$ .

Dokaži da pravac  $KL$  prolazi kroz ortocentar trokuta  $ABC$ .

*Ortocentar trokuta je točka u kojoj se sijeku njegove visine.*

**Zadatak 3.** Neka je  $k$  prirodan broj. Lexi ima rječnik  $\mathcal{D}$  koji se sastoji od riječi. Svaka riječ sastavljena je od  $k$  slova, od kojih je svako slovo  $A$  ili  $B$ . Lexi želi u svako polje  $k \times k$  ploče upisati ili slovo  $A$  ili slovo  $B$  tako da je svaki stupac jednak nekoj riječi iz  $\mathcal{D}$  kad ga pročitamo odozgo prema dolje te je svaki redak jednak nekoj riječi iz  $\mathcal{D}$  kad ga pročitamo slijeva nadesno.

Koji je najmanji prirodan broj  $m$  takav da ako  $\mathcal{D}$  sadrži barem  $m$  različitih riječi, onda Lexi može popuniti svoju ploču na opisani način, bez obzira na to koje riječi se nalaze u  $\mathcal{D}$ ?