



Language: Chinese (Simplified)

Day: 1

2023 年 4 月 15 日, 周六

题目 1. 给定整数 $n \geq 3$ 和 n 个正实数 a_1, a_2, \dots, a_n . 对每个 $i = 1, 2, \dots, n$, 记 $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (这里, 我们约定 $a_0 = a_n, a_{n+1} = a_1$). 假设对所有 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 都有 $a_i \leq a_j$ 当且仅当 $b_i \leq b_j$.

证明: $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

题目 2. 设 D 是锐角三角形 ABC 外接圆上一点使得 AD 为直径. 设点 K 和点 L 分别在线段 AB 和 AC 上, 满足 DK 和 DL 都与三角形 AKL 的外接圆相切.

证明: 三角形 ABC 的垂心在直线 KL 上.

注: 三角形的垂心是三角形三条高线的交点.

题目 3. 给定正整数 k . 一个间谍的密码本 \mathcal{D} 上写有若干只由字母 A 和 B 组成的长度为 k 个字母的字符串. 间谍希望在 $k \times k$ 的方格表中每个方格内填上字母 A 或 B , 使得每一列从上到下读恰好是 \mathcal{D} 中的某个字符串, 且每一行从左到右读也是 \mathcal{D} 中的某个字符串.

求最小的正整数 m 满足: 只要 \mathcal{D} 中含有至少 m 个不同的字符串, 不论含有的是哪些字符串, 间谍一定可以按上述要求填好方格表.

Language: Chinese (simplified)

时间: 4 小时 30 分钟
每题 7 分

考试题目在 4 月 16 日 22:00 UTC (00:00 (周一) 欧洲中部夏令时) 前请保密.