Language: **Bulgarian**

Day: **1**

Събота, 15 Април, 2023

Задача 1. Дадени са $n \geqslant 3$ положителни реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За всяко $1 \leqslant i \leqslant n$ нека $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (Дефинираме a_0 да е a_n и a_{n+1} да е a_1). Оказва се, че за всеки $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ е изпълнено, че $a_i \leqslant a_j$, тогава и само тогава когато $b_i \leqslant b_j$.

Докажете, че $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Задача 2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC. Нека D е такава точка от описаната му окръжност, че AD е диаметър. Точки K и L са взети съответно на страните AB и AC, така че DK и DL са допирателни към описаната около AKL окръжност.

Докажете, че правата KL минава през ортоцентъра на ABC.

Ортоцентър наричаме пресечната точка на височините в един триъгълник.

Задача 3. Нека k е положително цяло число. Лекси разполага с речник $\mathcal{D}$, съдържащ низове с дължина k, които са съставени единствено от буквите A и B. Лекси би искала да запише по една буква A или B във всяка клетка на таблица $k \times k$ по такъв начин, че всяка колона на таблицата, прочетена от горе надолу, да е някой низ от $\mathcal{D}$, както и всеки ред, прочетен от ляво надясно, да е някой низ от $\mathcal{D}$.

Кое е най-малкото естествено число m, за което е изпълнено, че ако $\mathcal{D}$ съдържа поне m различни низа, то Лекси може да запълни таблицата по желания от нея начин, независимо от съдържанието на $\mathcal{D}$?

Language: Bulgarian

Време: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Задачите са забранени за разпространение до понеделник, 17 април, 01:00 българско време!