EGMO Hungary | 2022 Eger

European Girls' Mathematical Olympiad

Субота, 9 квітня 2022

Задача 4. Для кожного натурального $n \geq 2$ знайдіть найбільше натуральне N таке, що існує $N+1$ дійсне число $a_0, a_1, \ldots, a_N$ для яких

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, та

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$, при $1 \leq k \leq N-1$.

Задача 5. Для всіх натуральних n та k через $f(n, 2k)$ позначимо кількість способів розбити дошку $n \times 2k$ на nk доміношок розміром 2×1. (Наприклад: $f(2,2) = 2$ та $f(3,2) = 3$.)
Знайдіть усі натуральні n такі, що для кожного натурального k число $f(n, 2k)$ є непарним.

Задача 6. Чотирикутник $ABCD$ вписано у коло з центром O. Бісектриси кутів A та B перетинаються в тоці X, бісектриси кутів B та C – в тоці Y, бісектриси кутів C та D – в тоці Z, бісектриси кутів D та A – в тоці W. Діагоналі AC та BD перетинаються в точці P. При цьому точки X, Y, Z, W, O та P попарно різні.

Доведіть, що точки O, X, Y, Z та W лежать на одному колі тоді й тільки тоді, коли P, X, Y, Z та W лежать на одному колі.

Час виконання: 4 години і 30 хвилин
Кожна задача оцінюється у 7 балів

Для того, щоб олімпіада пройшла чесно і була цікава всім учасникам, будь-ласка не викладайте в інтернет (соціальні мережі, месенджери, сайти тощо) умови олімпіади та їх розв'язки до неділі 10 квітня.