Language: **Spanish**

Day: **2**

Sábado 9 de abril de 2022

Problema 4. Para cada entero positivo $n \geq 2$, determine el mayor entero positivo N con la propiedad de que existen $N+1$ números reales $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tales que

(1) $a_0 + a_1 = -\dfrac{1}{n}$, y

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ para todo $1 \leq k \leq N-1$.

Problema 5. Dados n y k enteros positivos, sea $f(n, 2k)$ el número de formas en que un tablero de tamaño $n \times 2k$ puede ser completamente cubierto por nk fichas de dominó de tamaño 2×1 (por ejemplo, $f(2,2) = 2$ y $f(3,2) = 3$).
Encuentre todos los enteros positivos n tales que para todo entero positivo k, el número $f(n, 2k)$ es impar.

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con circuncentro O. Sea X el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle ABC$; sea Y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCD$; sea Z el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle BCD$ y $\angle CDA$; y sea W el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle CDA$ y $\angle DAB$. Sea P el punto de intersección de las rectas AC y BD. Suponga que los puntos O, P, X, Y, Z y W son distintos.

Pruebe que O, X, Y, Z y W están sobre una misma circunferencia si y sólo si P, X, Y, Z y W están sobre una misma circunferencias.

Idioma: Español

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Para que esta olimpiada sea justa y pueda ser disfrutada de la misma manera por todas, les rogamos no difundir estos problemas, ni en internet, ni en redes sociales, ni de ninguna otra forma, hasta el sábado 9 de abril a las 22:00 UTC (17:00 de Perú y Ecuador, 18:00 de Bolivia y 23:59 de Hungría).