EGMO 2022 Hungary Eger
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: **Slovak**

Day: **2**

9. apríla 2022

Úloha 4. Pre dané kladné celé číslo $n \geq 2$ určte najväčšie kladné celé číslo N také, že existujú reálne čísla $a_0, a_1, \ldots, a_N$ spĺňajúce obe podmienky:

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$,

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ pre všetky $1 \leq k \leq N-1$.

Úloha 5. Pre všetky kladné celé čísla n, k označme $f(n, 2k)$ počet spôsobov ako vieme tabuľku $n \times 2k$ vyplniť nk dominovými kockami veľkosti 2×1. (Napríklad, $f(2,2) = 2$ a $f(3,2) = 3$,)
Nájdite všetky kladné celé čísla n také, že pre každé kladné celé číslo k platí, že $f(n, 2k)$ je nepárne číslo.

Úloha 6. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník so stredom O kružnice jemu opísanej. Osi jeho vnútorných uhlov pri vrcholoch A a B sa pretínajú v X, osi vnútorných uhlov pri B a C v Y, osi vnútorných uhlov pri C a D v Z a osi vnútorných uhlov pri D a A v W. Priamky AC a BD sa pretínajú v P. Predpokladajme, že body X, Y, Z, W, O, P sú všetky rôzne.

Dokážte, že body O, X, Y, Z, W ležia na jednej kružnici práve vtedy, keď body P, X, Y, Z, W ležia na jednej kružnici.

Language: Slovak

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Každá úloha je hodnotená najviac 7 bodmi.

Aby sme túto súťaž spravili spravodlivou a príjemnou pre všetkých, prosíme, nezmieňujte alebo neposkytujte referencie o úlohách na internete alebo sociálnych médiach do soboty 9. apríla, 23:59.