EGMO 2022 Hungary Eger
European Girls' Mathematical Olympiad

Sâmbătă, 9 aprilie 2022

Problema 4. Dându-se numărul întreg $n \geq 2$, determinaţi cel mai mare număr natural N pentru care există $N+1$ numere reale $a_0, a_1, \ldots, a_N$ astfel încât

(1) $a_0 + a_1 = -\dfrac{1}{n}$, şi

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$, pentru $1 \leq k \leq N-1$.

Problema 5. Pentru orice numere naturale nenule n, k, fie $f(n, 2k)$ numărul de moduri în care poate fi acoperită complet o tablă dreptunghiulară $n \times 2k$ cu nk dominouri de mărime 2×1. (De exemplu, $f(2,2) = 2$ and $f(3,2) = 3$.)

Determinaţi toate numerele naturale nenule n pentru care numărul $f(n, 2k)$ este impar, oricare ar fi numărul natural nenul k.

Problema 6. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O. Fie X punctul de intersecţie a bisectoarelor interioare ale unghiurilor din A şi B, Y punctul de intersecţie a bisectoarelor interioare ale unghiurilor din B şi C, Z punctul de intersecţie a bisectoarelor interioare ale unghiurilor din C şi D şi W punctul de intersecţie a bisectoarelor interioare ale unghiurilor din D şi A. Fie P punctul de intersecţie a dreptelor AC şi BD. Presupunem că punctele X, Y, Z, W, O şi P sunt distincte două câte două.

Demonstraţi că punctele O, X, Y, Z şi W sunt conciclice dacă şi numai dacă punctele P, X, Y, Z şi W sunt conciclice.

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte

Pentru ca acest concurs să fie corect şi plăcut pentru toţi, vă rugăm să nu vă referiţi la probleme pe Internet sau pe reţelele de socializare până duminică, 10 aprilie, ora 1:00 (ora României).