Language: **Portuguese**

Day: **2**

Sábado, 9 de abril de 2022

Problema 4. Dado um inteiro positivo $n \geq 2$, determine o maior inteiro positivo N com a propriedade de que existem $N + 1$ números reais $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tais que

(1) $a_0 + a_1 = -\dfrac{1}{n}$;

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ para $1 \leq k \leq N - 1$.

Problema 5. Para todos os inteiros postivos n, k, seja $f(n, 2k)$ o número de maneiras que um tabuleiro $n \times 2k$ pode ser totalmente preenchido com nk dominós de tamanho 2×1. (Por exemplo, $f(2, 2) = 2$ e $f(3, 2) = 3$.)
Determine todos os inteiros postivos n, tais que, para todo inteiro positivo k, o número $f(n, 2k)$ é ímpar.

Problema 6. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico com circuncentro O.

As bissetrizes internas de A e B se intersectam em X, as bissetrizes internas de B e C se intersectam em Y, as bissetrizes internas de C e D se intersectam em Z e as bissetrizes internas de D e A se intersectam em W Além disso, seja P a interseção de AC e BD. Suponha que os pontos X, Y, Z, W, O e P são distintos.

Prove que O, X, Y, Z e W estão sobre a mesma circunferência se, e somente se, P, X, Y, Z e W estão sobre a mesma circunferência.

Language: Portuguese

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Para fazer dessa uma competição justa e agradável para todas, por favor não mencione ou faça referência aos problemas na internet ou nas redes sociais até o sábado, 9 de abril, 22:00 UTC (19:00 horário de Brasília).