Language: **Polish**

Day: **2**

Sobota, 9 kwietnia 2022 r.

Zadanie 4. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Wyznaczyć największą dodatnią liczbę całkowitą N, dla której istnieje $N+1$ liczb rzeczywistych $a_0, a_1, \ldots a_N$ spełniających warunki:

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$ oraz

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ dla $1 \leq k \leq N-1$

Zadanie 5. Dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych n, k niech $f(n, 2k)$ oznacza liczbę sposobów na jakie można pokryć w całości planszę o wymiarach $n \times 2k$ za pomocą nk kostek domina o wymiarach 2×1. (Dla przykładu, $f(2,2) = 2$ oraz $f(3,2) = 3$.)
Znaleźć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, takie że dla każdej dodatniej liczby całkowitej k liczba $f(n, 2k)$ jest nieparzysta.

Zadanie 6. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O. Dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i B przecinają się w punkcie X, dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach B i C przecinają się w punkcie Y, dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach C i D przecinają się w punkcie Z oraz dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach D i A przecinają się w punkcie W. Ponadto proste AC i BD przecinają się w punkcie P. Załóżmy, że punkty X, Y, Z, W, O i P są parami różne.

Wykazać, że punkty O, X, Y, Z i W leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy gdy punkty P, X, Y, Z i W leżą na jednym okręgu.

Language: Polish

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów

Aby zawody były sprawiedliwe i przyjemne dla wszystkich uczestniczek, nie zamieszczaj informacji o tych zadaniach w internecie ani mediach społecznościowych do północy z soboty 9 kwietnia na niedzielę 10 kwietnia.