



2022 m. balandžio 9 d., šeštadienis

**4 uždavinys.** Kiekvienam natūraliajam skaičiui  $n \geq 2$  nustatykite didžiausią natūralųjį skaičių  $N$ , kuriam egzistuoja tokie  $N + 1$  realiųjų skaičių  $a_0, a_1, \dots, a_N$ , kad

$$(1) \quad a_0 + a_1 = -\frac{1}{n} \text{ ir}$$

$$(2) \quad (a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}, \text{ kai } k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

**5 uždavinys.** Kiekvienai natūraliųjų skaičių porai  $n, k$  skaičius  $f(n, 2k)$  parodo, keliais būdais  $n \times 2k$  lentą galima pilnai uždengti su  $nk$  domino kauliukų, kurių matmenys yra  $2 \times 1$ . (Pavyzdžiui,  $f(2, 2) = 2$  ir  $f(3, 2) = 3$ .)

Raskite visus natūraliuosius skaičius  $n$ , kuriems skaičius  $f(n, 2k)$  yra nelyginis su visais natūraliaisiais skaičiais  $k$ .

**6 uždavinys.** Apie keturkampį  $ABCD$  apibrėžtas apskritimas su centru  $O$ . Šio keturkampio kampų  $A$  ir  $B$  (vidinės) pusiau kampinės kertasi taške  $X$ , kampų  $B$  ir  $C$  (vidinės) pusiau kampinės – taške  $Y$ , kampų  $C$  ir  $D$  (vidinės) pusiau kampinės – taške  $Z$ , o kampų  $D$  ir  $A$  (vidinės) pusiau kampinės – taške  $W$ . Tiesės  $AC$  ir  $BD$  kertasi taške  $P$ . Taškai  $X, Y, Z, W, O$  ir  $P$  yra tarpusavyje skirtingi.

Įrodykite: taškai  $O, X, Y, Z, W$  priklauso vienam apskritimui tada ir tik tada, kai taškai  $P, X, Y, Z, W$  priklauso vienam apskritimui.