EGMO Hungary | 2022 Eger
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: **Kazakh**

Day: 2

Суббота, 9 апреля, 2022

Задание 4. Для каждого натурального числа $n \geq 2$, определите наибольшее натуральное число N, для которого существует N+1 вещественных чисел $a_0, a_1, a_3, \dots, a_N$ таких, что

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, и
(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$, при $1 \leq k \leq N-1$

Задание 5. Для каждой пары натуральных чисел n и k через $f(n, 2k)$ обозначим количество способов, которыми можно полностью покрыть доску размера $n \times 2\mathrm{k}$ при помощи nk доминошек размера 2×1. (Например, $f(2,2) = 2$ и $f(3,2) = 3$.) Найдите все натуральные числа n такие, что для каждого натурального числа k число $f(n, 2k)$ нечётно.

Задание 6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$ с центром окружности O. Биссектрисы внутренних углов A и B пересекаются в точке X, биссектрисы внутренних углов B и C пересекаются в точке Y, биссектрисы внутренних углов C и D пересекаются в точке Z, а биссектрисы внутренних углов D и A пересекаются в точке W. Пусть AC и BD пересекаются в точке P. Предположим, что точки X, Y, Z, W, O и P различны. Докажите, что O, X, Y, Z и W лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда P, X, Y, Z и W лежат на одной окружности.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Чтобы олимпиада была честной и доставила всем удовольствие, пожалуйста, не упоминайте и не пишите ничего про задачи в интернете и любых социальных сетях до 04:00 ночи 10 апреля по времени Алматы.