Sabato 9 Aprile 2022

Problema 4. Dato un intero positivo $n \geq 2$ determinare il più grande intero positivo N per cui esistono $N+1$ numeri reali $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tali che

(1) $a_0 + a_1 = -\dfrac{1}{n}$,

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ per ogni $1 \leq k \leq N-1$.

Problema 5. Per tutti gli interi positivi n e k sia $f(n, 2k)$ il numero di modi in cui una griglia $n \times 2k$ può essere completamente ricoperta con nk tessere del domino di dimensione 2×1. (Per esempio $f(2,2) = 2$ e $f(3,2) = 3$.)
Trovare tutti gli interi positivi n tali che per ogni intero positivo k il numero $f(n, 2k)$ è dispari.

Problema 6. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico con circocentro O. Sia X il punto d'intersezione delle bisettrici interne in A e in B, Y il punto d'intersezione delle bisettrici interne in B e C, Z il punto d'intersezione delle bisettrici interne in C e D e W il punto d'intersezione delle bisettrici interne in D e A. Inoltre sia P il punto d'intersezione di AC e BD. Supponiamo che i punti X, Y, Z, W, O e P siano distinti.

Dimostrare che O, X, Y, Z e W giacciono sulla stessa circonferenza se e solo se P, X, Y, Z e W giacciono sulla stessa circonferenza.

Language: Italiano

Tempo a disposizione: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti

Per rendere la gara equa e divertente per tutte, non parlare dei problemi su internet o sui social media fino a Domenica 10 Aprile alle 00:00.