



Σάββατο, 9 Απριλίου, 2022

Πρόβλημα 4. Αν $n \geq 2$ θετικός ακέραιος, να βρείτε τον μέγιστο θετικό ακέραιο N για τον οποίο υπάρχουν $N + 1$ πραγματικοί αριθμοί a_0, a_1, \dots, a_N τέτοιοι, ώστε

$$(1) \quad a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}, \text{ και}$$

$$(2) \quad (a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1} \text{ για } 1 \leq k \leq N - 1.$$

Πρόβλημα 5. Για n, k θετικούς ακεραίους, έστω $f(n, 2k)$ το πλήθος των τρόπων με τους οποίους ένας $n \times 2k$ πίνακας μπορεί να καλυφθεί με nk ντόμινο μεγέθους 2×1 . (Π.χ. $f(2, 2) = 2$ και $f(3, 2) = 3$.) Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους n τέτοιους, ώστε για κάθε θετικό ακέραιο k , ο αριθμός $f(n, 2k)$ να είναι περιττός.

Πρόβλημα 6. Έστω εγγράψιμο τετράπλευρο $ABCD$ με περίκεντρο O . Έστω ότι οι εσωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών A και B τέμνονται στο X , οι εσωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών B και C τέμνονται στο Y , οι εσωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών C και D τέμνονται στο Z και οι εσωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών D και A τέμνονται στο W . Έστω επίσης P το σημείο τομής των AC και BD . Έστω ότι τα X, Y, Z, W, O και P είναι διαφορετικά ανά δύο. Να δείξετε ότι τα O, X, Y, Z και W είναι ομοκυκλικά αν και μόνο αν τα σημεία P, X, Y, Z και W είναι ομοκυκλικά.