Language: German

Day: 2

Samstag, 9. April 2022

Aufgabe 4. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Bestimme die größte (grösste) positive ganze Zahl N, für die $N+1$ reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_N$ existieren, sodass

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, und

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ für $1 \leq k \leq N-1$.

Aufgabe 5. Für alle positiven ganzen Zahlen n und k sei $f(n, 2k)$ die Anzahl der Möglichkeiten, ein $n \times 2k$ Brett vollständig mit nk Dominosteinen der Größe (Grösse) 2×1 zu überdecken. (Zum Beispiel gilt $f(2,2) = 2$ und $f(3,2) = 3$.)
Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die für jede positive ganze Zahl k die Zahl $f(n, 2k)$ ungerade ist.

Aufgabe 6. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreismittelpunkt O. Sei X der Schnittpunkt der beiden inneren Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) bei A und B, Y der Schnittpunkt der beiden inneren Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) bei B und C, Z der Schnittpunkt der beiden inneren Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) bei C und D, und W der Schnittpunkt der beiden inneren Winkelhalbierenden (Winkelsymmetralen) bei D und A. Sei außerdem (ausserdem) P der Schnittpunkt der Geraden AC und BD. Angenommen, die Punkte X, Y, Z, W, O und P sind paarweise verschieden.

Zeige, dass O, X, Y, Z und W genau dann auf einem Kreis liegen, wenn P, X, Y, Z und W auf einem Kreis liegen.

Zeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert

Um einen fairen und unterhaltsamen Wettbewerb für alle zu gewährleisten, dürfen diese Aufgaben nicht vor Sonntag, 10. April 0:00 Uhr mitteleuropäischer Sommerzeit im Internet oder in sozialen Netzwerken erwähnt oder diskutiert werden.