EGMO 2022 Hungary Eger
European Girls' Mathematical Olympiad

Language: **French**

Day: **2**

Samedi 9 avril 2022

Problème 4. Étant donné un entier positif $n \geq 2$, déterminer le plus grand entier strictement positif N pour lequel il existe $N+1$ nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tels que

(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, et

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq N-1$.

(Le nombre N peut dépendre de n.)

Problème 5. Pour tous entiers n, k strictement positifs, $f(n, 2k)$ désigne le nombre de façons de recouvrir complètement un rectangle de dimension $n \times 2k$ par nk dominos de dimension 2×1. (Par exemple, $f(2, 2) = 2$ et $f(3, 2) = 3$.)

Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels que pour tout entier strictement positif k, le nombre $f(n, 2k)$ est impair.

Problème 6. Les points A, B, C et D sont sur un cercle de centre O. Soient X le point d'intersection des bissectrices issues de A et de B, Y le point d'intersection des bissectrices issues de B et de C, Z le point d'intersection des bissectrices issues de C et de D, et W le point d'intersection des bissectrices issues de D et de A. De plus, P est le point d'intersection des droites AC et BD. Supposons que les points X, Y, Z, W, O et P sont tous distincts.

Montrer que les points O, X, Y, Z et W sont sur un même cercle si et seulement si les points P, X, Y, Z et W sont sur un même cercle.

Language: French

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points

Pour que cette compétition reste juste et plaisante pour chacune, évitez de publier ou de discuter des problèmes sur internet ou sur les réseaux sociaux avant le samedi 9 avril 22h UTC.