



Lauantai, 9.4.2022

Tehtävä 4. On annettu positiivinen kokonaisluku $n \geq 2$, selvitä suurin positiivinen kokonaisluku N , jota kohti on olemassa $N + 1$ reaalilukua a_0, a_1, \dots, a_N , joilla

$$(1) \quad a_0 + a_1 = -\frac{1}{n} \text{ ja}$$

$$(2) \quad (a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}, \text{ kun } 1 \leq k \leq N - 1.$$

Tehtävä 5. Olkoon $f(n, 2k)$ lukumäärä, joka kertoo kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, k , kuinka monella eri tavalla $n \times 2k$ -lauta voidaan peittää täysin nk kappaleella kokoa 2×1 olevilla domino-laatoilla. (Esimerkiksi on $f(2, 2) = 2$ ja $f(3, 2) = 3$.)

Etsi kaikki sellaiset positiiviset kokonaisluvut n , että kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla k luku $f(n, 2k)$ on pariton.

Tehtävä 6. Olkoon $ABCD$ jänneelikulmio, jonka ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on O . Kulmien A ja B sisäkulmien puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä X , kulmien B ja C sisäkulmien puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä Y , kulmien C ja D sisäkulmien puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä Z sekä kulmien D ja A sisäkulmien puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä W . Lisäksi, olkoon suorien AC ja BD leikkauspiste P . Oletetaan, että pisteet X, Y, Z, W, O ja P ovat eri pisteitä.

Osoita, että pisteet O, X, Y, Z ja W ovat samalla ympyrällä jos ja vain jos pisteet P, X, Y, Z ja W ovat samalla ympyrällä.

Language: Finnish

Aika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen

Jotta kilpailu olisi mukava ja reilu kaikille, älä mainitse tai viittaa mitenkään kilpailutehtäviin internetissä tai sosiaalisessa mediassa ennen kuin sunnuntaina 10.4. klo 00:00 (Unkarin kesäaikaa).