sobota 9. dubna 2022

Úloha 4. Pro dané kladné celé číslo $n \geq 2$ určete největší kladné celé číslo N, pro které existuje $N+1$ reálných čísel $a_0, a_1, \ldots, a_N$ takových, že

(1) $a_0 + a_1 = -\dfrac{1}{n}$ a

(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ pro všechna $1 \leq k \leq N-1$.

Úloha 5. Pro kladná celá čísla n, k označme $f(n, 2k)$ počet způsobů, kterými lze tabulku $n \times 2k$ vydláždit nk dominovými kostkami velikosti 2×1. (Například $f(2,2) = 2$ a $f(3,2) = 3$.)
Najděte všechna kladná celá čísla n taková, že pro každé kladné celé číslo k je $f(n, 2k)$ liché.

Úloha 6. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme O střed kružnice jemu opsané. Osy jeho vnitřních úhlů při vrcholech A a B se protínají v bodě X, osy vnitřních úhlů při B a C v bodě Y, osy vnitřních úhlů při C a D v bodě Z a osy vnitřních úhlů při D a A v bodě W. Přímky AC a BD se protínají v bodě P. Předpokládejme, že body X, Y, Z, W, O, P jsou navzájem různé.

Dokažte, že O, X, Y, Z, W leží na jedné kružnici, právě když P, X, Y, Z, W leží na jedné kružnici.

Čas: 4 hodiny a 30 minut
Za každou úlohu lze získat až 7 bodů

Aby soutěž byla byla regulérní a příjemná pro všechny soutěžící, nezmiňujte prosím úlohy a nediskutujte o nich na internetu a sociálních sítích do soboty 9. dubna, 23:59 hodin.