Language: **Ukrainian**

Day: **1**

П'ятниця, 8 квітня 2022

Задача 1. У гострокутному трикутнику ABC відомо, що $BC < AB$ та $BC < CA$. Точки P та Q вибрано на відрізках AB та AC відповідно так, що $P \neq B$, $Q \neq C$ і $BQ = BC = CP$. Через T позначимо центр описаного кола трикутника APQ, через H – ортоцентр трикутника ABC, через S – точку перетину прямих BQ та CP. Доведіть, що точки T, H та S лежать на одній прямій.

Задача 2. Через $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ позначимо множину натуральних чисел. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такі, що для всіх натуральних чисел a та b виконуються дві умови:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, та

(2) серед чисел $f(a)$, $f(b)$ та $f(a + b)$ є хоча б два однакових.

Задача 3. Нескінченну послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, \ldots$ будемо називати *квадратною*, якщо

(1) a_1 є точним квадратом,

(2) для всіх натуральних $n \geq 2$, a_n є найменшим натуральним числом, для якого

$$na_1 + (n - 1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

є точним квадратом.

Доведіть, що для будь-якої квадратної послідовності $a_1, a_2, \ldots$, існує натуральне число k таке, що рівність $a_n = a_k$ виконується для всіх натуральних $n \geq k$.

Language: Ukrainian

Час виконання: 4 години і 30 хвилин
Кожна задача оцінюється у 7 балів

Для того, щоб олімпіада пройшла чесно і була цікава всім учасникам, будь-ласка не викладайте в інтернет (соціальні мережі, месенджери, сайти тощо) умови олімпіади та їх розв'язки до неділі 10 квітня.