Language: **Spanish**

Day: **1**

Viernes 8 de abril de 2022

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con $BC < AB$ y $BC < AC$. Considere los puntos P y Q en los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que $P \neq B$, $Q \neq C$ y $BQ = BC = CP$. Sea T el circuncentro del triángulo APQ, H el ortocentro del triángulo ABC y S el punto de intersección de las rectas BQ y CP. Pruebe que los puntos T, H y S están en una misma recta.

Problema 2. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los enteros positivos. Determine todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para cualquier pareja de enteros positivos a y b, se cumplen las siguientes dos condiciones:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, y

(2) al menos dos de los números $f(a), f(b)$ y $f(a + b)$ son iguales.

Problema 3. Se dice que una sucesión infinita de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots$ es *húngara* si

(1) a_1 es un cuadrado perfecto, y

(2) para todo entero $n \geq 2$, a_n es el menor entero positivo tal que

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

es un cuadrado perfecto.

Pruebe que si $a_1, a_2, \ldots$ es una sucesión húngara, entonces existe un entero positivo k tal que $a_n = a_k$ para todo entero $n \geq k$.

Idioma: Español

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Para que esta olimpiada sea justa y pueda ser disfrutada de la misma manera por todas, les rogamos no difundir estos problemas, ni en internet, ni en redes sociales, ni de ninguna otra forma, hasta el sábado 9 de abril a las 22:00 UTC (17:00 de Perú y Ecuador, 18:00 de Bolivia y 23:59 de Hungría).