Language: **Slovenian**

Day: **1**

petek, 8. april 2022

Naloga 1. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, za katerega velja $BC < AB$ in $BC < CA$. Naj točka P leži na daljici AB in točka Q leži na daljici AC, tako da $P \neq B$, $Q \neq C$ in $BQ = BC = CP$. Naj bo T središče očrtane krožnice trikotnika APQ, H višinska točka trikotnika ABC, in S presečišče premic BQ in CP. Dokaži, da so T, H in S kolinearne.

Naloga 2. Naj bo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ množica naravnih števil. Poišči vse funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ki za vsaka a, $b \in \mathbb{N}$ zadoščajo naslednjima dvema pogojema:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, in

(2) vsaj dve izmed števil $f(a)$, $f(b)$ in $f(a+b)$ sta enaki.

Naloga 3. Neskončno zaporedje naravnih števil $a_1, a_2, \ldots$ je *prijetno*, če velja:

(1) a_1 je popolni kvadrat, in

(2) za vsako naravno število $n \geq 2$ je a_n najmanjše tako naravno število, da je

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

popolni kvadrat.

Dokaži, da za vsako prijetno zaporedje $a_1, a_2, \ldots$ obstaja tako naravno število k, da velja $a_n = a_k$ za vsa naravna števila $n \geq k$.

Language: Slovenian

Čas pisanja: 4 ure in 30 minut
Vsaka naloga je vredna 7 točk

Da bo tekmovanje pošteno za vse, ni dovoljeno objaviti ali kakorkoli omeniti nalog na internetu ter socialnih omrežjih do nedelje, 10. aprila.